Astrofizyka IV

Wnętrza, ewolucja i pulsacje gwiazd.

Krzysztof Kamiński

Temat wykładu

Równowaga termiczna i mechaniczna

Pochodna

Sferyczna symetria = wewnętrzne parametry (np. ρ, P, T) zależą tylko od r.

Ewolucja/przemiany = wewnętrzne parametry zależą od t.

d/dr (lub d/dm) należy rozumieć jako pochodną cząstkową **przy stałym t**.

Mechanika płynów

Analiza wędrowna – metoda Lagrange'a

Badamy ruch wybranej grupy atomów (elementu płynu).

Wszystkie wielkości fizyczne są funkcją początkowej pozycji w momencie t_0 i aktualnego czasu.

$$f=f\left(x_{0,}\,y_{0,}\,z_{0,}\,t\right)$$

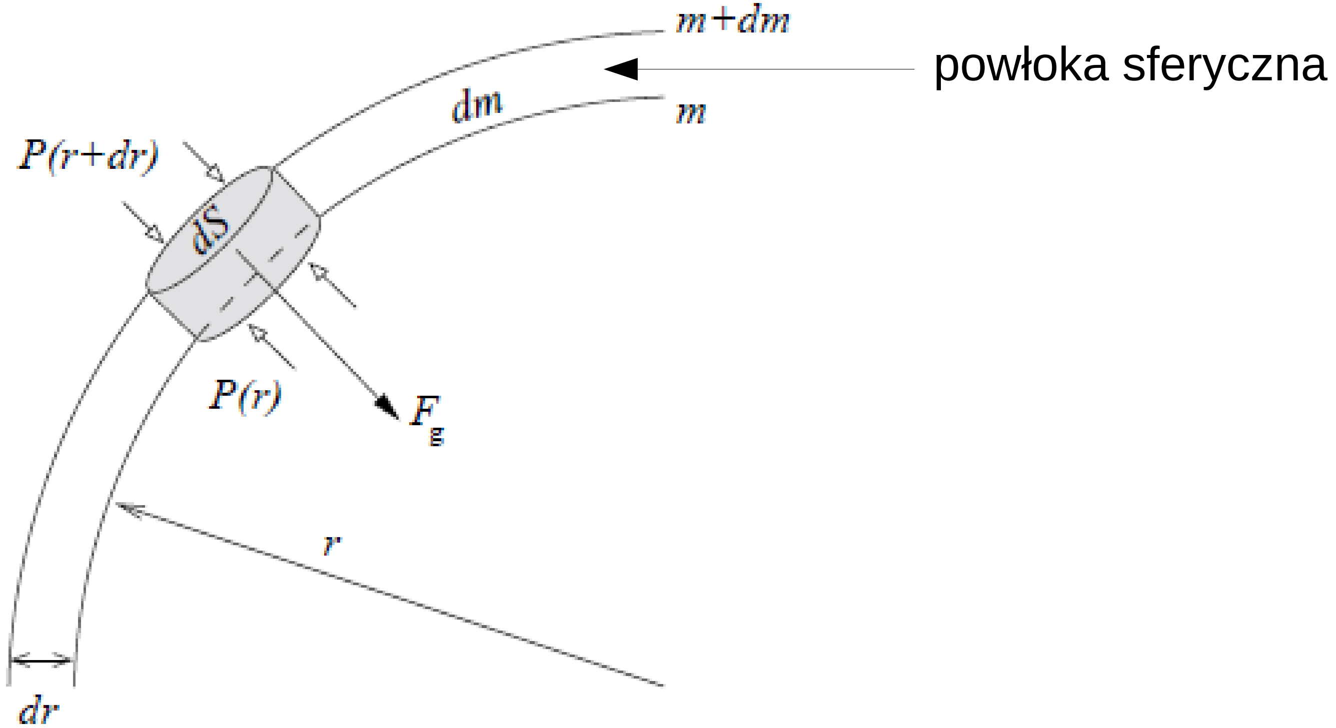
Analiza lokalna – metoda Eulera

Badamy ruch w wybranym punkcie przestrzeni.

Wszystkie wielkości fizyczne są funkcją pozycji i aktualnego czasu t.

$$f=f\left(x\,,y\,,z\,,t\right)$$

Zasada zachowania masy



$$dm = \rho(r)\, dV = \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr$$

Zasada zachowania masy

Równanie ciągłości: $\frac{dr}{dm}=\frac{1}{4\pi r^2\rho}$ $\rho=f(r)$ *lub* $\rho=f(m)$

$$\frac{dm}{dr}=4\pi r^2\rho$$

Zasada zachowania masy

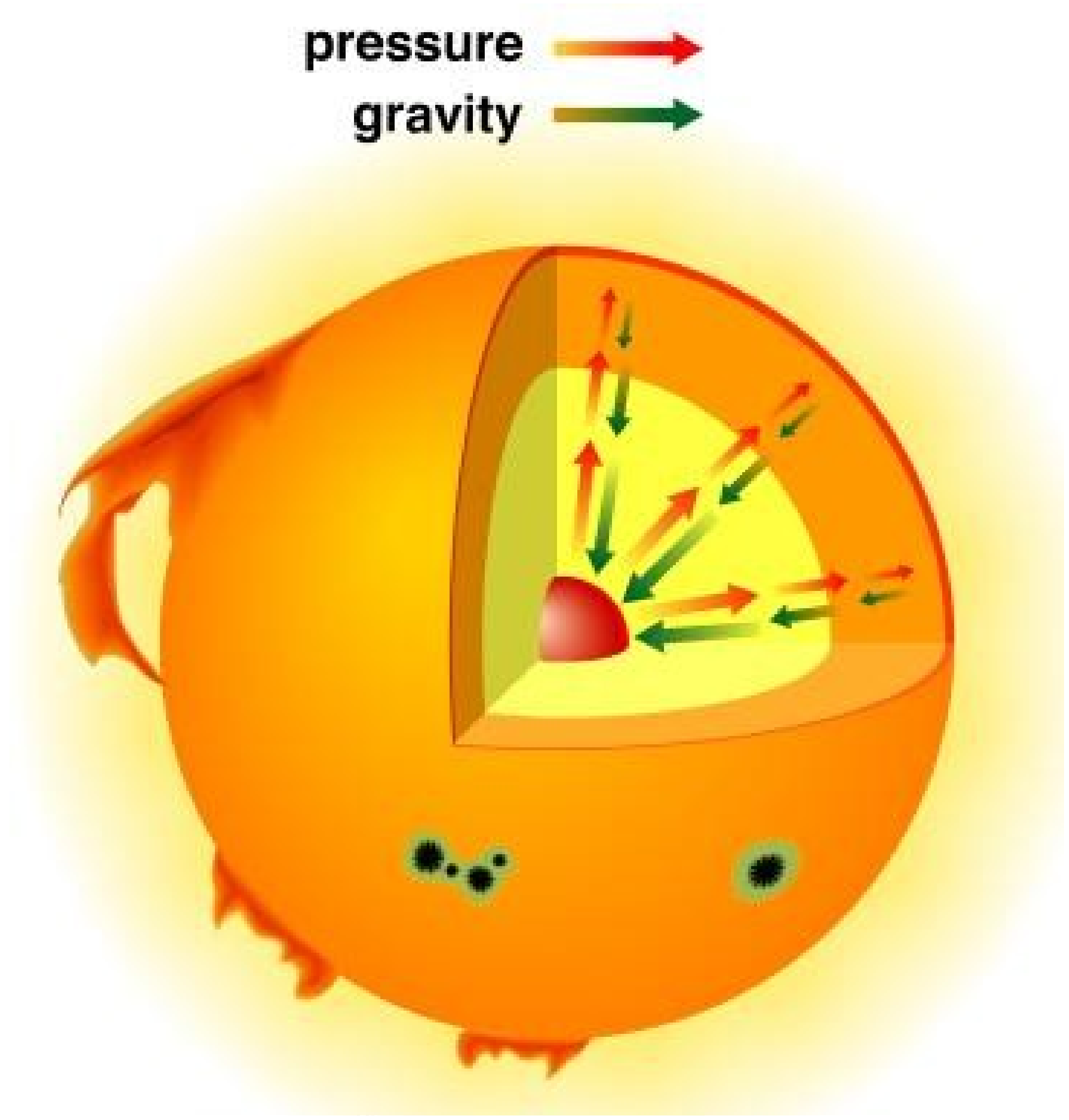
Współrzędna masowa: $m \equiv m_r = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho \, dr' \qquad m \in \langle 0 \ldots M \rangle$

Jakie są zalety współrzędnej masowej?

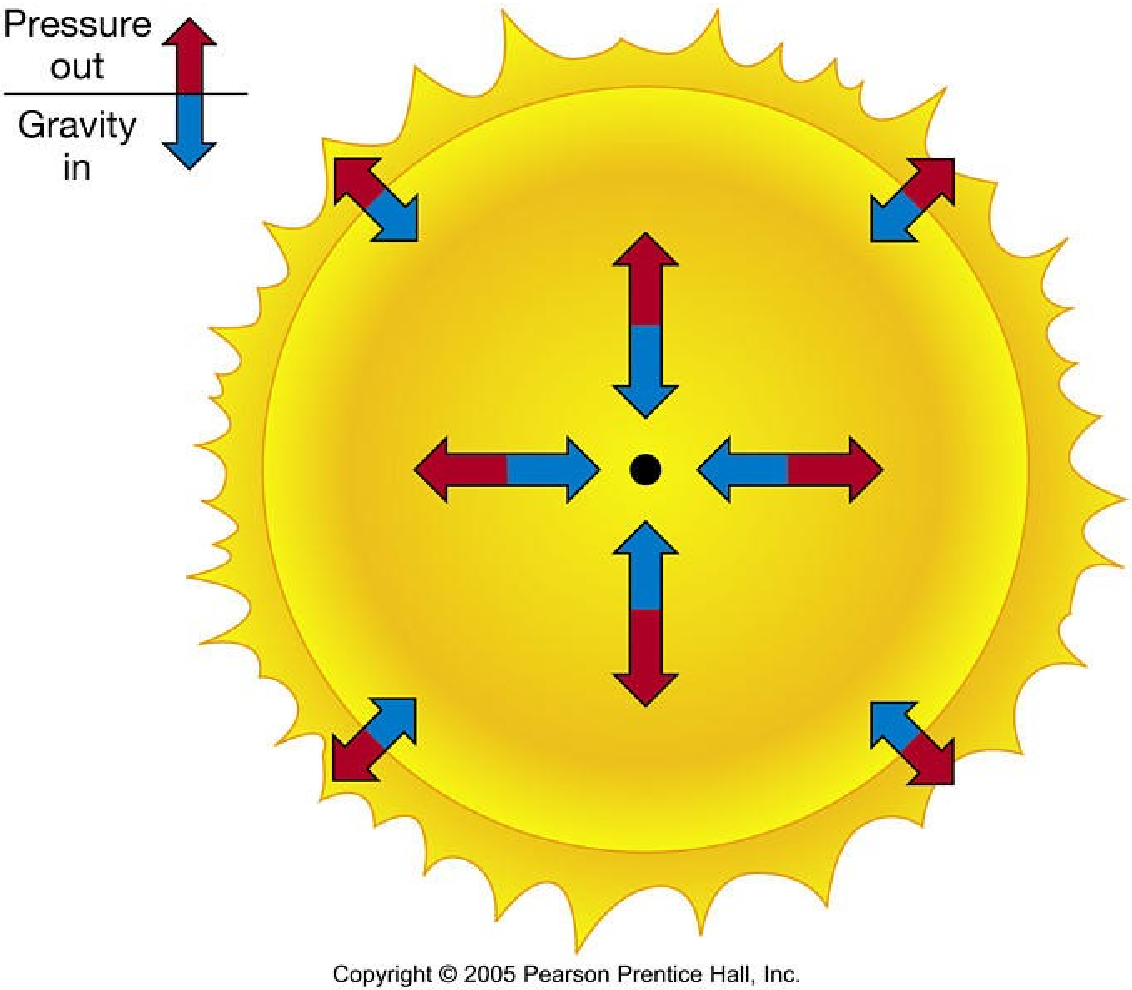
Poszczególne warstwy materii we wnętrzu gwiazdy zmieniają współrzędną r nawet o kilka rzędów wielkości, ale nie zmieniają w tym czasie wartości m. Jest to analiza „wędrowna”, w której współrzędne układu odniesienia poruszają się razem z materią którą opisują. Może to uprościć niektóre równania ewolucyjne, gdyż m zawiera się w stałym przedziale wartości, przynajmniej dopóki gwiazda nie traci masy.

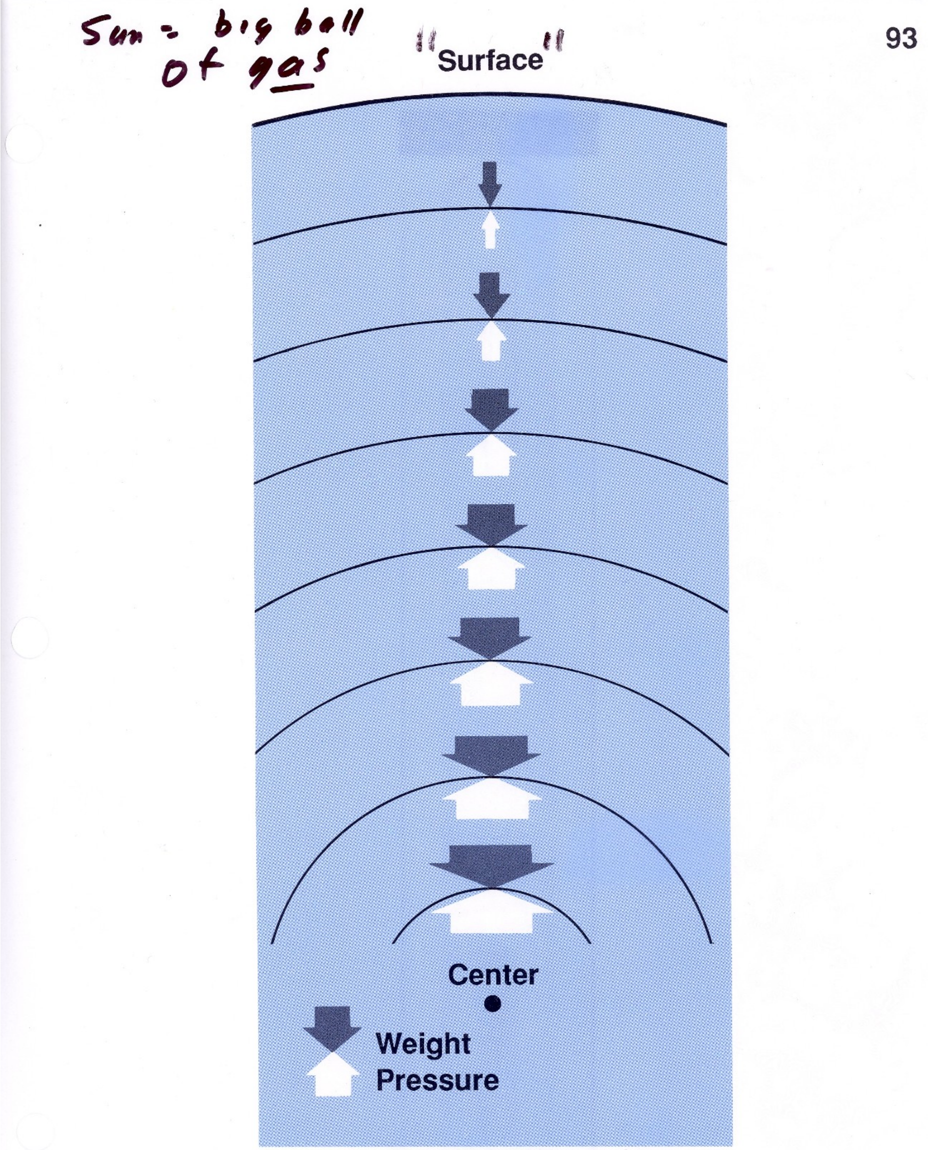
Współrzędna m odpowiada analizie wędrownej Lagrange’a, współrzędna r analizie lokalnej Eulera.

Równowaga hydrostatyczna



Równowaga hydrostatyczna

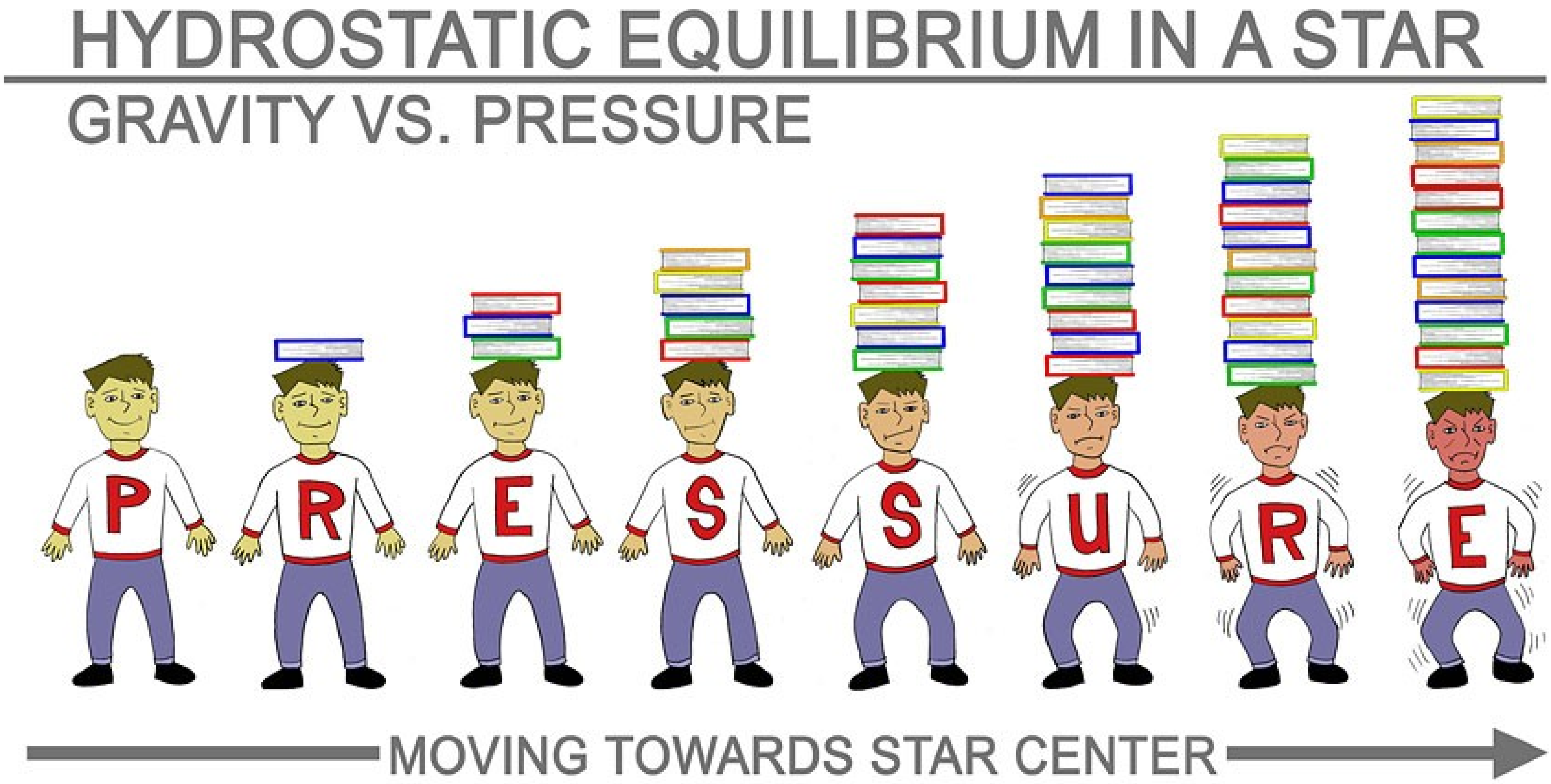




Hydrostatic equilibrium

Seeds, Horizons, 3rd ed., Fig. 9-19; Foundations of Astronomy, 1990 ed., Fig. 8-4

Równowaga hydrostatyczna



Równowaga hydrostatyczna

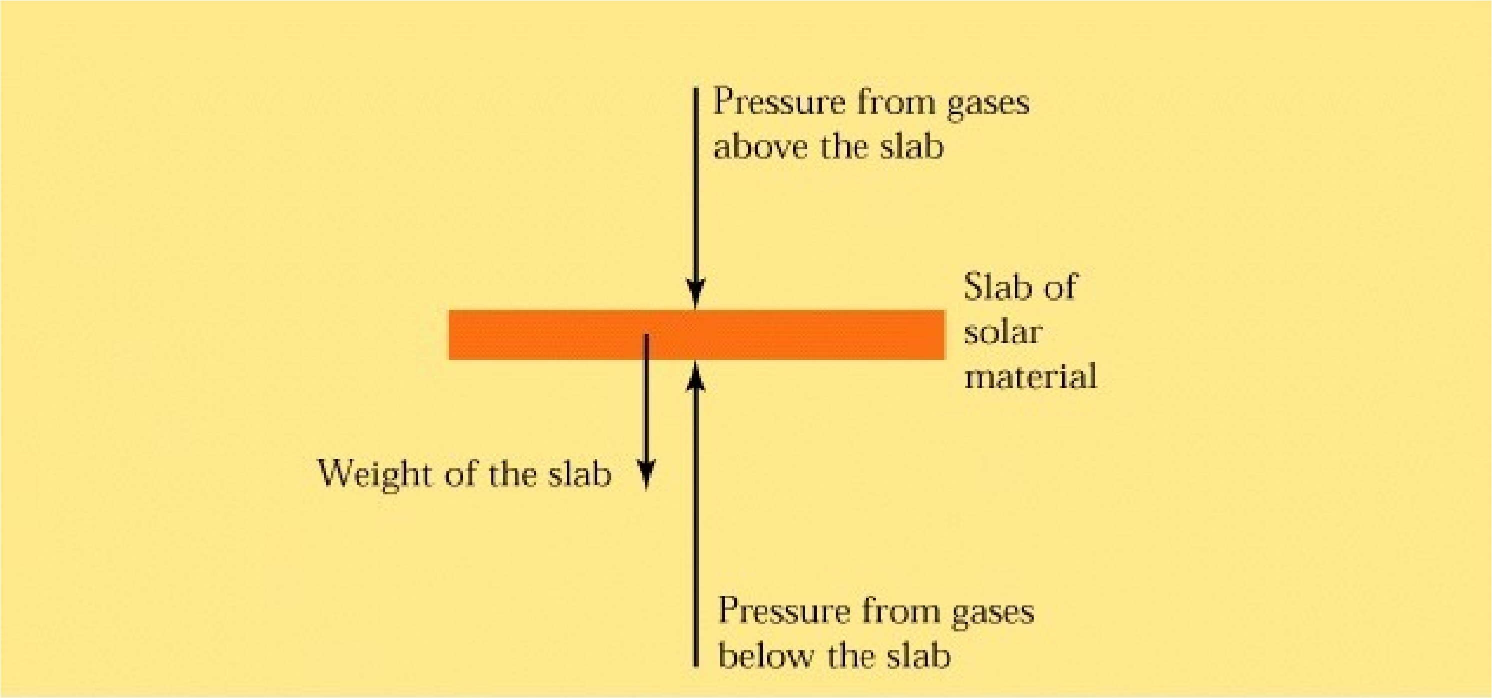
Czy równowaga hydrostatyczna naprawdę polega na równowadze pomiędzy ciśnieniem a siłą grawitacji?

Nie. Polega na równowadze pomiędzy GRADIENTEM ciśnienia a siłą grawitacji.

Zagłębiając się pod powierzchnię gwiazdy będziemy mieli:

- coraz większe ciśnienie (wynikające z coraz większej masy nad naszą głową)
- coraz słabszą grawitację (ponieważ przeciąganie zewnętrznych warstw się zeruje)
- coraz mniejszy gradient ciśnienia (równy niemal dokładnie sile grawitacji)

Równowaga hydrostatyczna



In hydrostatic equilibrium, forces balance

Przyspieszenie w polu grawitacyjnym

W polu grawitacyjnym (zachowawczym): $\vec{g} = -\vec{\nabla}\,\Phi$

Dla pola sferycznie symetrycznego: $g \equiv |\vec{g}| = \frac{d\,\Phi}{dr}$

Dla ciała sferycznie symetrycznego potencjał pola grawitacyjnego jest definiowany za pomocą pracy jaką należy wykonać przesuwając ciało z nieskończoności:

$$\Phi(r) = \frac{W}{m_{el}} = \frac{1}{m_{el}} \int_{\infty}^{r} F\,dr = \frac{1}{m_{el}} \int_{\infty}^{r} \frac{G\,m_{el}\,m}{r^2}\,dr$$

$$\Phi = -G\,\frac{m}{r}$$

Przyspieszenie grawitacyjne: $g = \frac{Gm}{r^2}$

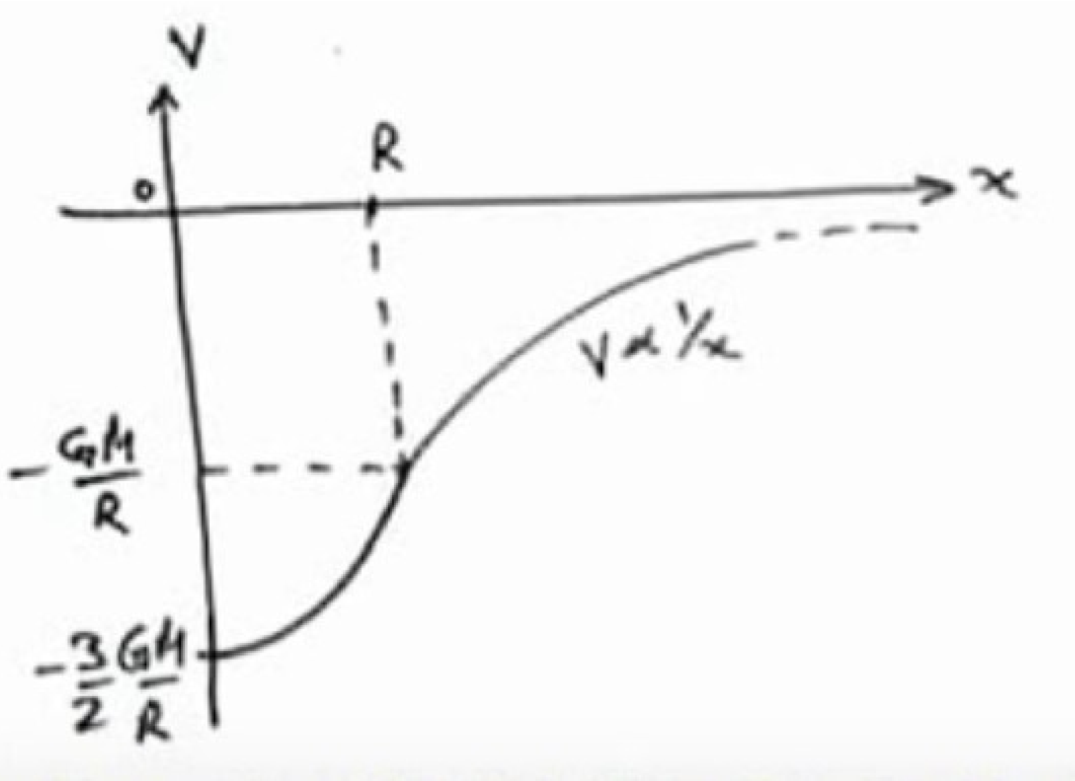
Potencjał grawitacyjny kuli

$$\Phi_{out} = -\frac{GM}{x}$$

$$\Phi_{sur} = -\frac{GM}{R}$$

$$\Phi_{ins} = -\frac{GM}{2R^3}\left[3R^2 - x^2\right]$$

$$\Phi_{cen} = -\frac{3GM}{2R} = \frac{3}{2}\Phi_{sur}$$



Równanie ruchu fragmentu gazu

Masa cylindrycznego fragmentu gazu: $dm = \rho\, dr\, dS$

Siły działające na fragment gazu: $\ddot{r}\, dm = -g\, dm + P(r)\, dS - P(r + dr)\, dS$

Równanie ruchu fragmentu gazu: $$\ddot{r} = -\frac{G\, m}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}$$

$$\ddot{r} = -\frac{G\, m}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{dP}{dm}$$

Równowaga hydrostatyczna

Warunek równowagi: $\ddot{r} = 0$

Równanie równowagi hydrostatycznej: $$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Co wynika bezpośrednio z tej postaci równania?

Ciśnienie w równowadze hydrostatycznej <u>zawsze</u> rośnie do wnętrza gwiazdy.

Struktura mechaniczna gwiazd w równowadze hydrostatycznej

Równanie ciągłości:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Równanie równowagi hydrostatycznej:

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Tych równań nie da się rozwiązać bo mamy trzy niewiadome funkcje:

r(m), ρ(m), P(m)   lub   m(r), ρ(r), P(r)

Potrzebne jest jeszcze równanie stanu, które niestety zależy zwykle od T, a więc wprowadza dodatkową niewiadomą T(r) lub T(m).

W szczególnych przypadkach (politropy), równanie stanu jest nie zależne od rozkładu temperatury. Wówczas struktura termiczna i mechaniczna są od siebie niezależne.

Rotująca gwiazda

Dla gwiazdy rotującej trzeba uwzględnić również siłę odśrodkową, która zmniejsza przyspieszenie grawitacyjne g:

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} = \frac{1}{4\pi r^2} g$$

$$\nabla P = -\rho g_{eff}$$

Uwzględnienie tej siły pozwala wyciągnąć wniosek, że gwiazda rotująca jednorodnie (jak ciało sztywne) NIE może znajdować się w równowadze hydrostatycznej.

Szacowanie ciśnienia centralnego

Równanie równowagi hydrostatycznej: $$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Szacunkowe założenia:

$$dP \sim P_{pow} - P_{centr} \approx -P_{centr}$$

$$dm \sim M$$

$$m \sim \frac{1}{2} M$$

$$r \sim \frac{1}{2} R$$

$$P_{centr} \sim \frac{GM^2}{R^4}$$

$$P_{centr,sun} \sim 7 \cdot 10^{15}\, dyn/cm^2$$

Wyznaczenie limitu ciśnienia centralnego

Równanie równowagi hydrostatycznej: $$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}\frac{dm}{dr}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right) - \frac{G\,m^2}{2\pi r^5}$$

$$\frac{d}{dr}\left(P + \frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right) = -\frac{G\,m^2}{2\pi r^5}$$

Co widać w tym równaniu?

Prawa strona jest zawsze ujemna.

Wyznaczenie limitu ciśnienia centralnego

$$\frac{d}{dr}\left(P+\frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right)=-\frac{G\,m^2}{2\pi r^5}<0$$

Dla małych r: $m \propto r^3$

Stąd dla r =0: $P+\frac{Gm^2}{8\pi r^4}=P_{centr}+0$

Dla r =R: $P+\frac{Gm^2}{8\pi r^4}=0+\frac{GM^2}{8\pi R^4}$

$$P_{centr}+0>0+\frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

$$P_{centr,sun}>4.4\cdot 10^{14}\,dyn/cm^2$$

$$P_{centr,sun,real}=2.4\cdot 10^{17}\,dyn/cm^2$$

Dynamiczna skala czasu

Ruch jednostajnie przyspieszony: $$S = \frac{a\,t^2}{2}$$

Szacujemy: $$S = R$$

$$a = g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\tau_{dyn} \sim \sqrt{\frac{2\,R^3}{GM}}$$

$$\tau_{dyn} \sim \frac{1}{\sqrt{G\,\bar{\rho}}}$$

$$\tau_{dyn,sun} \approx 2200\,s$$

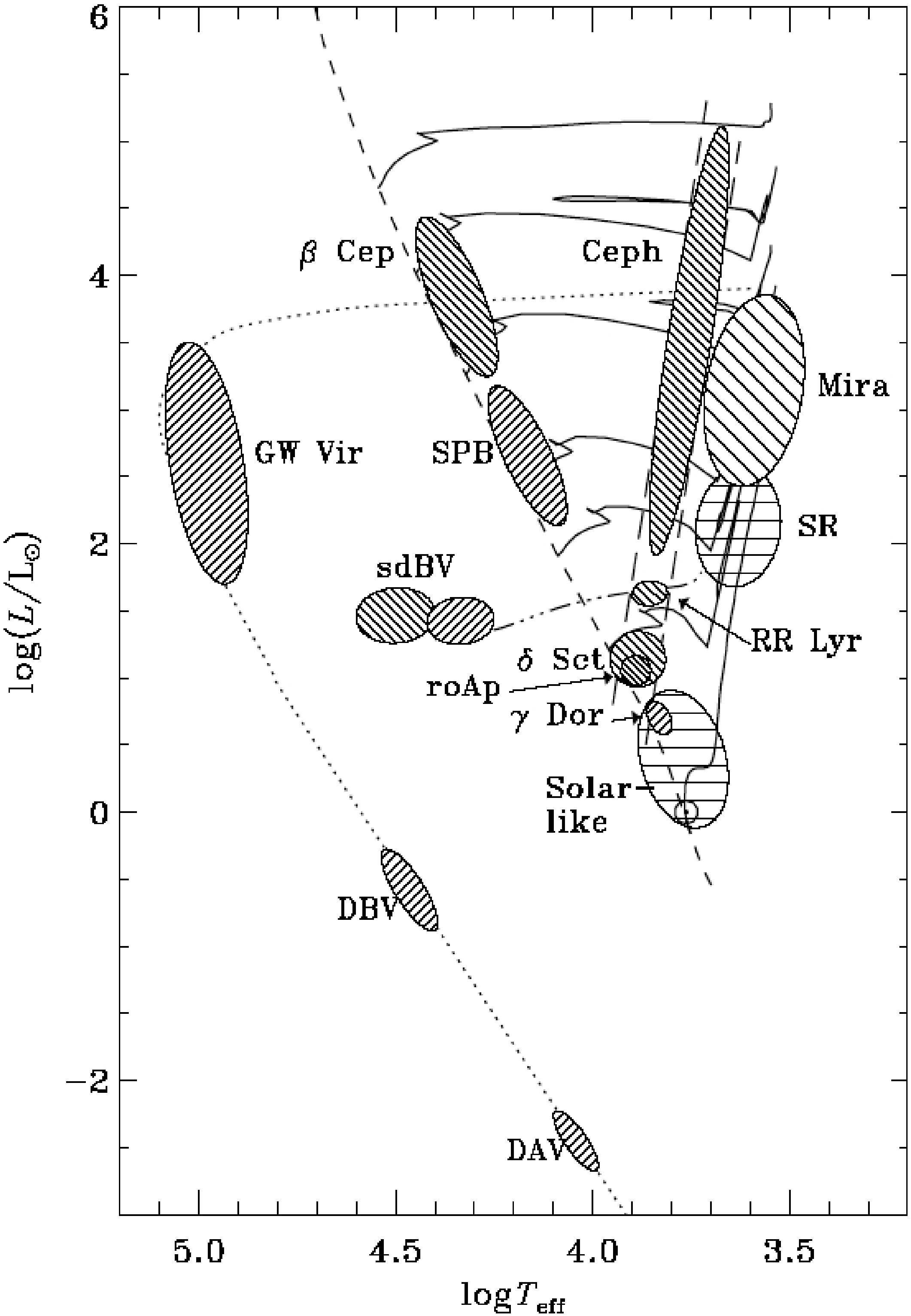
Dynamiczna skala czasu - wnioski

Każde znaczące zaburzenie równowagi hydrostatycznej oznacza znaczącą zmianę struktury mechanicznej gwiazdy w krótkim czasie.

Trwała utrata równowagi hydrostatycznej oznacza kolaps lub eksplozję gwiazdy.

Po niewielkim zaburzeniu równowagi hydrostatycznej powrót do stanu równowagi trwa bardzo krótko w porównaniu do czasu „życia” gwiazdy.

Ewolucja gwiazdy musi więc przebiegać blisko równowagi hydrostatycznej podczas większości „życia” gwiazdy – zakładamy zwykle, że jest quasi-statyczna.



Gwiazdy pulsujące:

Miry – okres ponad 100 dni

Cefeidy – okres 1 – 50 dni

RR Lyr – okres 0.3 – 1 dnia

γ Dor – okres ok. 1 dzień

δ Sct – okres kilka godzin

SPB – okres 0.5 – 5 dni

β Cep – okres 0.1 – 0.3 dni

GW Vir – 300 – 500 sek

DAV – 30 – 1500 sek

Twierdzenie o wiriale

Równanie równowagi hydrostatycznej: $$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

Mnożymy obustronnie przez: $$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

i całkujemy: $$\int_0^M \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{dP}{dm} dm = -\frac{1}{3}\int_0^M \frac{Gm}{r} dm$$

prawa strona: $$E_{pot} = \int_0^M \frac{Gm}{r} dm$$

lewa strona: $$\int_{P_{centr}}^{P_{pow}} V\, dP = [V \cdot P]_{centr}^{pow} - \int_0^{V_{pow}} P\, dV$$

Twierdzenie o wiriale

$$\int_{P_{centr}}^{P_{pow}} V\,dP = [V \cdot P]_{centr}^{pow} - \int_0^{V_{pow}} P\,dV$$

W centrum: $V = 0$

Na powierzchni: $P_{pow} \approx 0$

$$-3\int_0^{V_{pow}} P\,dV = E_{pot}$$

$$-3\int_0^{M} \frac{P}{\rho}\,dm = E_{pot}$$

Jeśli: $P = const = \bar{P}$

Wówczas: $\bar{P} = -\frac{1}{3}\frac{E_{pot}}{V} \approx \frac{GM^2}{4\pi R^4}$

Co to oznacza dla gwiazd kurczących się lub pęczniejących quasi-statycznie?

Wzrost lub spadek ciśnienia.

Twierdzenie o wiriale dla gazu doskonałego

$$-3\int_0^M \frac{P}{\rho}\, dm = E_{pot}$$

Z równania stanu: $$P = n\,k\,T = \frac{N}{V}\,k\,T = \frac{\rho}{\mu\, m_u}\,k\,T$$

Średnia energia kinetyczna cząstki gazu: $$\epsilon_k = \frac{3}{2}\,k\,T$$ (→ z rozkładu Maxwella!)

A więc energia kinetyczna
na jednostkę masy: $$u = \frac{3}{2}\,\frac{k\,T}{\mu\, m_u} = \frac{3}{2}\,\frac{P}{\rho}$$

$$\int_0^M \frac{P}{\rho}\, dm = \frac{2}{3}\int_0^M u\, dm = \frac{2}{3}\, E_{wewn}$$

$$E_{wewn} = -\frac{1}{2}\, E_{pot}$$

Silniej związana grawitacyjnie gwiazda (mniejsza)
zbudowana z gazu doskonałego
musi mieć więcej energii wewnętrznej (gorętsza).

Szacowanie temperatury wewnętrznej gwiazd

$$E_{wewn} = -\frac{1}{2} E_{pot}$$

Grawitacyjna energia potencjalna gwiazdy:

$$E_{pot} \approx -\frac{GM^2}{R}$$

Energia wewnętrzna gwiazdy:

$$E_{wewn} = \int_0^M \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_u} dm = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_u} \int_0^M T\, dm$$

$$E_{wewn} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_u} \bar{T} M$$

$$\bar{T} = \frac{1}{3} \frac{\mu m_u}{k} \frac{GM}{R}$$

$$\bar{T}_{Sun} = 4 \cdot 10^6 K$$

Twierdzenie o wiriale nie tylko dla gazu doskonałego

$$-3\int_0^M \frac{P}{\rho}\,dm = E_{pot}$$

Energia kinetyczna
na jednostkę masy:

$$u = \Phi \frac{P}{\rho}$$

$$E_{wewn} = -\frac{1}{3}\Phi E_{pot}$$

Dla gazu doskonałego: $\Phi = \frac{3}{2}$

Dla gazu relatywistycznego (fotonowego): $\Phi = 3$

Całkowita energia gwiazdy

$$E_{całk} = E_{wewn} + E_{pot} + E_{kin}$$

Ponieważ: $E_{kin} = 0$ $\qquad E_{wewn} = -\frac{1}{3}\Phi E_{pot}$

$$E_{całk} = \left(1 - \frac{1}{3}\Phi\right) E_{pot}$$

Gwiazda jest stabilna gdy całkowita energia jest ujemna.

$$\Phi < 3$$

To oznacza, że nie tylko z gazu doskonałego można zbudować stabilną gwiazdę oraz, że nie jest możliwa stabilna hydrostatycznie gwiazda zbudowana jedynie z relatywistycznego gazu fotonowego:)

Całkowita energia gwiazdy

$$E_{całk} = \left(1 - \frac{1}{3}\Phi\right) E_{pot}$$

Dla gazu doskonałego: $\Phi = \frac{3}{2}$

Gdy gwiazda świeci: $L = -\frac{dE_{calk}}{dt} > 0$

$$\dot{E}_{całk} = \frac{1}{2}\dot{E}_{pot} = -L$$

W wyniku świecenia gwiazda zmienia:

$\dot{E}_{pot} = -2L < 0$ $\dot{E}_{wewn} = L > 0$

Gwiazda ma ujemne ciepło właściwe!

Czy gwiazdy lub planety olbrzymy mogą wystygnąć?

Skale czasu ewolucji gwiazd

Dynamiczna skala czasu:

$$t_{dyn} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx 0.02 \left(\frac{R}{R_{sun}}\right)^{3/2} \left(\frac{M_{sun}}{M}\right)^{1/2} \qquad dni$$

Termiczna skala czasu:

$$t_{KH} = \frac{E_{wewn}}{L} \approx \frac{|E_{pot}|}{2L} \approx 1.5 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_{sun}}\right)^2 \frac{R_{sun}}{R} \frac{L_{sun}}{L} \qquad lat$$

Skale czasu ewolucji gwiazd

Nuklearna skala czasu:

$$E_{nuc} = \varphi f_{nuc} M c^2$$

$$t_{nuc} = \frac{E_{nuc}}{L} = \varphi f_{nuc} \frac{Mc^2}{L}$$

Dla: $\varphi = 0.007,\ f_{nuc} = 0.1$

Mamy: $t_{nuc} = 10^{10} \left(\frac{M}{M_{sun}} \right) \left(\frac{L_{sun}}{L} \right) \quad lat$

Skale czasu ewolucji gwiazd

$$t_{nuc} \gg t_{KH} \gg t_{dyn}$$