Astrofizyka IV

Wnętrza, ewolucja i pulsacje gwiazd.

Krzysztof Kamiński

Temat wykładu

Równania stanu materii we wnętrzach gwiazd

W poprzednim odcinku

Równanie ciągłości – zasada zachowania masy

Równanie równowagi hydrostatycznej

Struktura mechaniczna gwiazdy

Szacowanie ciśnienia w centrum gwiazd

Limit ciśnienia w centrum gwiazd

Twierdzenie o wiriale dla gwiazdy w równowadze hydrostatycznej

Twierdzenie o wiriale dla gazu doskonałego

Energia całkowita (grawitacyjna i termiczna) gwiazdy

Trzy skale czasu ewolucji gwiazd

Kilka pytań (z odpowiedziami)

Dlaczego gwiazdy mają gorące wnętrza?

Gdyż jest to warunek konieczny do utrzymania równowagi hydrostatycznej (struktury mechanicznej) dla gazu doskonałego. Optymistycznie zakładając, że to przybliżenie jest dostatecznie dobre:).

Jakie są konsekwencje wypromieniowywania energii przez samograwitującą kulę gazu doskonałego dla jej promienia i temperatury centralnej?

Zmiana rozkładu temperatury powoduje zmianę rozkładu ciśnienia, a więc może zmienić równowagę hydrostatyczną (strukturę mechaniczną) gwiazdy. Gwiazda będzie się kurczyć, a gradient temperatury i ciśnienia musi wzrosnąć by zrównoważyć zmianę rozkładu przyspieszenia grawitacyjnego w bardziej zwartym ciele.

Dlaczego większość gwiazd tak się (zazwyczaj) nie zachowuje?

Utrata energii spowodowanej promieniowaniem jest kompensowana produkcją energii termojądrowej. Utrzymywanie stałej temperatury centralnej hamuje kurczenie.

Kilka pytań (z odpowiedziami)

Co się stanie z gwiazdą w równowadze termicznej i hydrostatycznej gdy spadnie tempo produkcji energii termojądrowej w jej wnętrzu? W jakiej skali czasu nastąpią zmiany?

Rozkład temperatury będzie się zmieniał w termicznej skali czasu,
ale hydrostatyczna struktura gwiazdy będzie cały czas w pełnej równowadze,
dostosowanej do chwilowego rozkładu temperatury we wnętrzu gwiazdy.
Gwiazda będzie się powoli kurczyła, a temperatura jądra będzie rosła.

**Jak długo może się kurczyć gwiazda zbudowana z gazu doskonałego,
jeśli w jej wnętrzu nie produkujemy energii?**

Jeśli zachowane będą założenia początkowe to aż do matematycznego punktu:
nieskończenie małych rozmiarów i nieskończenie wysokiej temperatury.

Co może zapobiec kurczeniu się gwiazd do matematycznego punktu?

Zmiana stanu materii – z gazu doskonałego do stanu opisanego
innymi równaniami stanu!!!

Window To The Stars

Rozkład masy, ciśnienia i temperatury w gwiazdach ciągu głównego o masach: 0.1, 1.0, 10.0 M_{sun} (zakładka „internals”).

Widać jak gradient ciśnienia i temperatury maleje do środka.
Niestety nie widać zmian przyspieszenia grawitacyjnego.

Czy ciśnienie centralne zmienia się z masą gwiazdy tak jak to szacowaliśmy?

$$P_{centr} \sim \frac{GM^2}{R^4}$$

Zmiany gęstości i temperatury w centrum Słońca wraz z wiekiem w czasie ewolucji na ciągu głównym (zakładka „structure”) .

Widać stabilność parametrów gwiazdy, ale jednak występują pewne wiekowe zmiany. Dlaczego? O tym przekonamy się dziś na wykładzie:)

Równowaga termodynamiczna

W odizolowanym układzie złożonym z materii (i fotonów) po dostatecznie długim czasie ustala się stan równowagi termodynamicznej.

Równowaga pomiędzy materią i promieniowaniem ustala się w wyniku dostatecznie dużej ilości interakcji pomiędzy cząstkami (zderzenia) oraz cząstkami i fotonami (absorpcja i emisja).

Równowaga termodynamiczna

Równowaga mechaniczna
(brak niezrównoważonych sił)

Równowaga termiczna
(brak przepływu energii)

Równowaga chemiczna
(brak przemian chemicznych, przemian fazowych)

Parametry makroskopowe układu nie zmieniają się w czasie.

Rozkład statystyczny własności fizycznych fotonów i cząstek zależy jedynie od wspólnej dla całego układu temperatury.

Równowaga termodynamiczna

Równowaga termodynamiczna

Równowaga mechaniczna
(brak niezrównoważonych sił)

Równowaga termiczna
(brak przepływu energii)

Równowaga chemiczna
(brak zmian chemicznych np. przemian fazowych)

Równowaga hydrostatyczna

Gradient ciśnienia równoważy wszelkie siły.

Równowaga termiczna

Brak przepływu energii – stała temperatura.

Stały w czasie i przestrzeni rozkład temperatury
(zrównoważony przepływ energii).

Równowaga termodynamiczna

Gwiazdy nie znajdują się w równowadze termodynamicznej ponieważ nie są odizolowane od otoczenia (np. emitują światło) oraz wytwarzają energię w swoim wnętrzu.

Choć gwiazdy nie są w równowadze jako całość, to jednak niewielkie fragmenty materii gwiazdowej o rozmiarach << R i większych niż przeciętny dystans pokonywany przez cząstki pomiędzy kolejnymi oddziaływaniami mogą się znajdować bardzo blisko takiej równowagi.

Aby się o tym przekonać rozważmy średnią drogę swobodną fotonów.

Średnia droga swobodna

n - ilość cząstek na jednostkę objętości

σ - przekrój czynny cząstki = miara prawdopodobieństwa interakcji

$K = n\sigma$ - całkowity przekrój czynny na jednostkę objętości

$\kappa = n\sigma/\rho$ - całkowity przekrój czynny na jednostkę masy,
czyli **współczynnik ekstynkcji** lub **nieprzezroczystości** materii

Średnia droga swobodna: prawdopodobieństwo interakcji = 1

$$1 = K\, l_{ph} = \kappa\rho\, l_{ph}$$

$$l_{ph} = \frac{1}{\kappa\rho}$$

Średnia droga swobodna fotonów

$$l_{ph} = \frac{1}{\kappa \rho}$$

Dla Słońca: $\rho_{core} \approx 100\, g/cm^3$ $\kappa_{core} \approx 0.4\, cm^2/g$ (patrz WTTS)

$l_{ph} \sim 0.25\, mm$ → materia gwiazdowa jest bardzo nieprzezroczysta dla promieniowania!

Dla Słońca: $\Delta T \sim T_{centrum} \frac{l_{ph}}{R} \approx 10^{-5}\, K$

Dla cząstek: $l_{ph} > l_{ions}$

LTE gdy rozmiar obszaru r:

$$R \gg r \gg l_{ph}$$

Średni czas swobodny fotonów

$$t = \frac{l_{ph}}{c} \sim 10^{-12}\, s$$

Czas ten jest znacznie mniejszy od wszystkich poznanych skal czasu zmian zachodzących w makroskopowych parametrach gwiazd.

Wiemy stąd, że wewnątrz gwiazdy występuje LTE, a to oznacza, że mamy dobrze określoną temperaturę w każdym miejscu gwiazdy.

LTE oznacza również, że termodynamiczne własności gwiazd można określić na podstawie lokalnych temperatur, gęstości i składu chemicznego.

Średni czas błądzenia fotonów we wnętrzu gwiazdy

Średnia odległość od punktu startu:

$$a_x = 1 \quad lub \quad -1 \qquad \langle a_x \rangle = 0 \qquad d = a_1 + a_2 + ... + a_N$$

$$\langle d \rangle = \langle a_1 + a_2 + ... + a_N \rangle \qquad \langle d \rangle = \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle + ... + \langle a_N \rangle = 0$$

Średni kwadrat odległości od punktu startu:

$$\langle d^2 \rangle = \langle (a_1 + a_2 + ... + a_N)^2 \rangle \qquad \langle d^2 \rangle = \langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle + ... + \langle a_N^2 \rangle + 2(\langle a_1 a_2 \rangle + \langle a_1 a_3 \rangle + ... + \langle a_{N-1} a_N \rangle)$$

$$\langle a_x^2 \rangle = 1 \qquad \langle a_1 a_2 \rangle = 0$$

$$\langle d^2 \rangle = 1 + 1 + ... 1 + 2(0 + 0 + ... + 0) = N$$

$$RMS = \sqrt{\langle d^2 \rangle} = \sqrt{N}$$

Średni czas błądzenia fotonów we wnętrzu gwiazdy

Ilość kroków niezbędna by osiągnąć powierzchnię jednowymiarowego Słońca:

$$N=\left(\frac{R}{0.25\,mm}\right)^2=8\cdot 10^{24}$$

Całkowita droga i czas wynoszą więc:

$$d=2\cdot 10^{23}\,cm \qquad t=\frac{d}{c} \qquad t=2\cdot 10^{4}\,lat$$

Zgodnie z pracą Walkera (2006) średni czas wędrówki fotonu wynosi:

Dla modelu Słońca o stałej gęstości wewnętrznej (15g/cm^3): $5\cdot 10^4$ lat

Dla modelu Słońca o liniowo zmieniającej się gęstości: $3\cdot 10^6$ lat

Równanie stanu

Dla układu w stanie równowagi termodynamicznej można zdefiniować funkcje opisujące stan układu, które zależą tylko od aktualnego stanu opisanego gęstością, temperaturą, składem chemicznym.

$$P = P(\rho, T, X_i)$$

$$U = U(\rho, T, X_i)$$

pozwala wyznaczyć

c_V, c_p ciepło właściwe

γ_{ad} wykładnik adiabatyczny

∇_{ad} adiabatyczny gradient temperatury

Gaz doskonały

Wyprowadźmy równanie stanu gazu doskonałego z praw mechaniki statystycznej.

Założenie: cząstki gazu oddziałują ze sobą „słabo”, czyli energie oddziaływań są małe w porównaniu do kinetycznych, a więc energia wewnętrzna jest sumą energii kinetycznych.

n(p) – rozkład pędów cząstek;
n(p)dp – ilość cząstek w jednostce obj. o pędach pomiędzy p, a p+dp

Jeśli znamy n(p) wówczas możemy wyznaczyć n, U i P.

Całkowitą ilość cząstek na jednostkę objętości:

$$n=\int_0^\infty n(p)\,dp$$

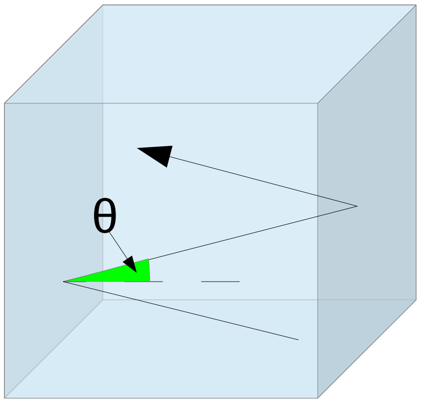
Energię wewnętrzną na jednostkę objętości (gęstość energii wewnętrznej):

$$U=\int_0^\infty \epsilon_p\, n(p)\,dp = n\langle \epsilon_P\rangle$$

energia kinetyczna cząstki o pędzie p i prędkości v_p

Gaz doskonały

Ciśnienie P = ?



L = 1cm

Czas pomiędzy kolizjami (z tą samą ścianką):

$$\Delta t = \frac{2L}{v\cos\theta} = \frac{2}{v\cos\theta}$$

Zmiana pędu:

$$\Delta p = 2p\cos\theta$$

Pęd przekazany dowolnej ściance przez 1 cząstkę, na sekundę, na cm^2:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = vp\cos^2\theta$$

Gaz doskonały

Ciśnienie P = ?

Oznaczmy n(θ, p) dθ dp – ilość cząstek na jedn. obj. dla przedziału dθ i dp

Wówczas ich wkład do ciśnienia wynosi:

$$dP = \frac{\Delta p}{\Delta t} n(\theta, p)\, d\theta\, dp = vp \cos^2\theta\, n(\theta, p)\, d\theta\, dp$$

Wektor pędu p jest rozłożony izotropowo (pełny kąt bryłowy: Ω=2π).
Rozkład cząstek w zależności od kąta θ, czyli n(θ) zależy więc tylko od geometrii, a konkretnie od powierzchni pierścienia sferycznego o kątach θ = <θ … θ + dθ> która wynosi:

$$d\omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

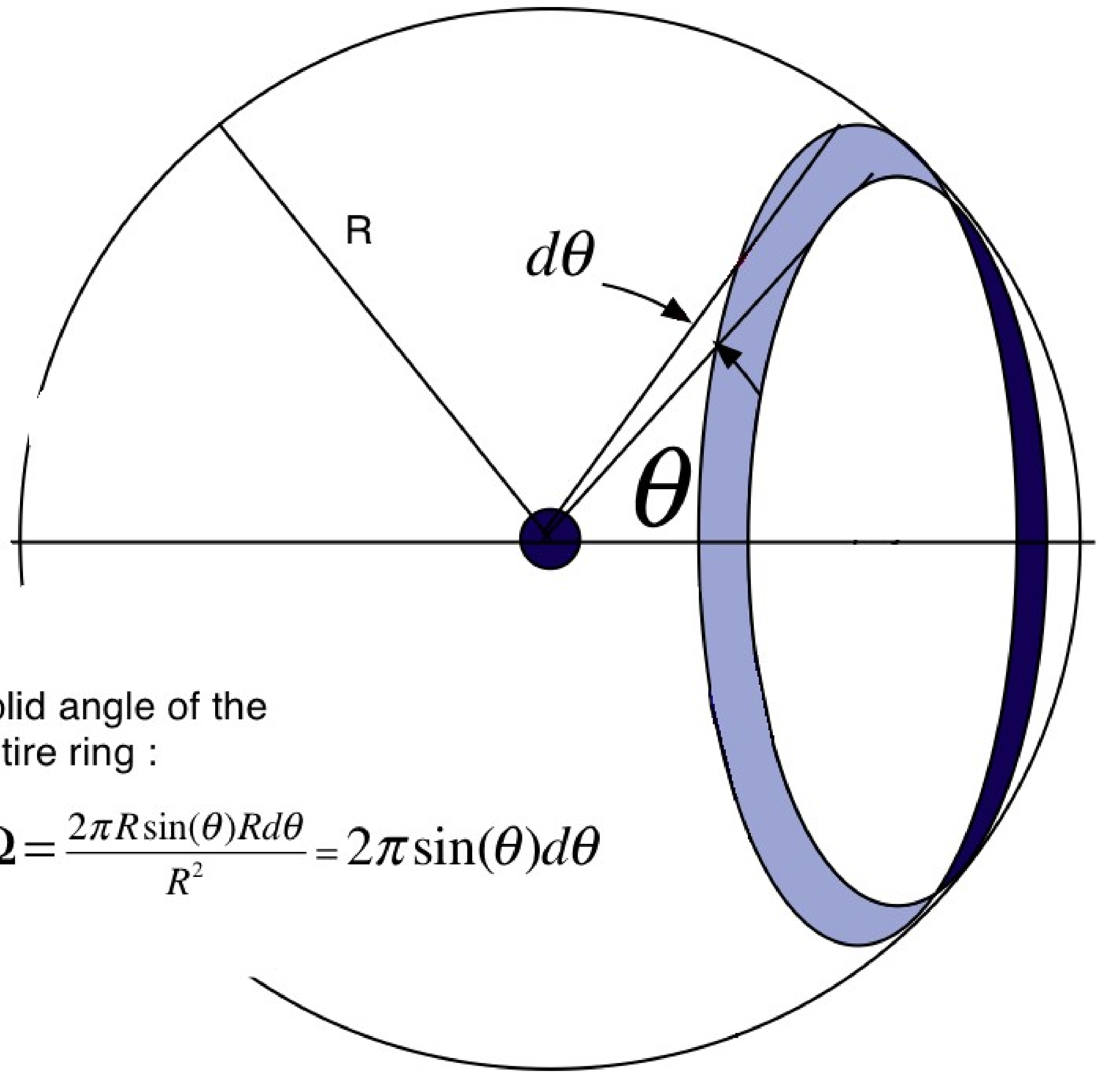
Stąd rozkład w zależności n(θ, p) można uprościć, bo znamy n(θ):

$$n(\theta, p)\, d\theta = n(p) \sin\theta\, d\theta$$

$$dP = v\, p\, n(p) \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, dp$$

Kąt bryłowy odpowiadający pierścieniowi na kuli

$$d\,\Omega = \frac{dA}{R^2}$$



Solid angle of the entire ring :

$$d\Omega = \frac{2\pi R \sin(\theta) R d\theta}{R^2} = 2\pi \sin(\theta) d\theta$$

Gaz doskonały

Ciśnienie P = ?

$$d\,P = v\,p\,n(p)\cos^2\theta\sin\theta\,d\,\theta\,dp$$

$$P = \int_0^\infty dP = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} v\,p\,n(p)\cos^2\theta\sin\theta\,d\,\theta\,dp$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta\,d\,\theta = 1/3$$

Ciśnienie P:

$$P = \frac{1}{3}\int_0^\infty p\,v_p\,n(p)\,dp = \frac{1}{3}\,n\langle p\,v_p\rangle$$

Gaz doskonały

Ciśnienie a energia wewnętrzna

Z teorii względności wynika:

Związek całkowitej energii cząstki i jej pędu:

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Energia całkowita cząstki jest sumą energii kinetycznej i spoczynkowej:

$$\epsilon = \epsilon_p + m_0 c^2$$

Prędkość:

$$v_p = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{p c^2}{\epsilon}$$

Z tych zależności możemy wyprowadzić ogólne relacje pomiędzy makroskopowym ciśnieniem gazu P, a jego energią wewnętrzną U.

Gaz doskonały

Ciśnienie a energia wewnętrzna

Przypadek nierelatywistyczny: $p^2 c^2 \ll m_0^2 c^4 \qquad p \ll m_0 c$

Rozwinięcie w szereg (z dwumianem Newtona):

$$(1+y)^{0.5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} y^k = 1 + \frac{1}{2} y - \frac{1}{8} y^2 + \ldots$$

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

$$\frac{\epsilon}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{p^2 c^2}{m_0^2 c^4}\right)^{0.5}$$

$$\epsilon = m_0 c^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0} + \ldots$$

obcinamy bo p jest <m_0c

$$\epsilon_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_0}$$

$$v_p = \frac{p}{m_0}$$

$$\langle p v_p \rangle = \langle p^2 / m_0 \rangle = 2 \langle \epsilon_p \rangle$$

Gaz doskonały

Ciśnienie a energia wewnętrzna

Przypadek nierelatywistyczny: $p \ll m_0 c$

$$P = \frac{1}{3} n \langle p v_p \rangle = \frac{1}{3} n 2 \langle \epsilon_p \rangle$$

$$P = \frac{2}{3} U$$

Przypadek ekstremalnie relatywistyczny: $p^2 c^2 \gg m_0^2 c^4$ $p \gg m_0 c$

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 \qquad \epsilon_p = p c \qquad v_p = c$$

$$\langle p v \rangle = \langle p c \rangle = \langle \epsilon_p \rangle$$

$$P = \frac{1}{3} U$$

Te zależności są prawdziwe dla dowolnych cząstek w równowadze – również dla fotonów. Przydadzą się nam później.

Gaz doskonały

Klasyczne równanie stanu

Dla nierelatywistycznych cząstek w LTE obowiązuje rozkład Maxwella-Boltzmanna:

$$n(p)\,dp = \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} e^{-p^2/2\mathrm{mkT}} 4\pi p^2 dp$$

czynnik normalizujący do n

równowagowy
rozkład en. kin.

objętość
w przestrzeni
pędów

$$P = \frac{1}{3}\frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}}\int_0^\infty \frac{p^2}{m} e^{-p^2/2\mathrm{mkT}} 4\pi p^2 dp$$

$$P = nkT$$

(Można pokazać, że równanie to obowiązuje zarówno dla
nie-relatywistycznych jak i relatywistycznych cząstek klasycznych.)

Gaz doskonały

No dobrze – mamy klasyczne równanie stanu – gaz doskonały.

Ale przecież nawet przyjmując, że to równanie jest wystarczającym przybliżeniem, nie można nie zauważyć, że gwiazd są zbudowane z różnych cząstek.

Powstaje pytanie:
czy mieszanina gazów doskonałych nadal jest gazem doskonałym?

Mieszanina gazów doskonałych

Dla mieszanki gazów doskonałych równanie stanu gazu dosk. obowiązuje dla każdego składnika z osobna, dopóki efekty kwantowe mogą być pomijane.

$$P = \sum P_{jony} + P_e = \left(\sum_i n_i + n_e\right) kT = nkT$$

$$n_i = \frac{X_i \rho}{m_i} = \frac{X_i}{A_i}\frac{\rho}{m_u}$$ - ilość i-tego jonu na jednostkę objętości

masa cząstki w jedn. masy atomowej ≈ liczba masowa

$$n_{jony} = \sum_i \frac{X_i}{A_i}\frac{\rho}{m_u} \equiv \frac{1}{\mu_{jony}}\frac{\rho}{m_u}$$

$$\frac{1}{\mu_{jony}} = \sum_i \frac{X_i}{A_i}$$ μ_{jony} - średnia masa atomowa przypadająca na jeden jon

$$P_{jony} = \frac{1}{\mu_{jony}}\frac{\rho}{m_u} kT = \frac{R}{\mu_{ion}} \rho T \qquad R = k/m_u = 8.31 \cdot 10^7 \, erg \, g^{-1} K^{-1}$$

uniwersalna stała gazowa

Mieszanina gazów doskonałych

$$P = \sum P_{jony} + P_e = \left(\sum_i n_i + n_e\right) kT = nkT$$

ładunek jonu ≠ liczba atomowa

$$n_e = \sum_i Z_i n_i = \sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i} \frac{\rho}{m_u} \equiv \frac{1}{\mu_e} \frac{\rho}{m_u}$$

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i}$$

μ_e - średnia masa atomowa na jeden wolny elektron

$$P_e = \frac{1}{\mu_e} \frac{\rho}{m_u} kT = \frac{R}{\mu_e} \rho T$$

Mieszanina gazów doskonałych

Gdy gaz jest w pełni zjonizowany wówczas ładunek Z i liczba masowa A:

Dla H: $Z_i = A_i = 1$

Dla He i cięższych: $Z_i / A_i \approx 1/2$

A więc średnia masa atomowa na jeden wolny elektron wynosi:

$$\frac{1}{\mu_e} \approx \sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i} = X + \frac{1}{2}(Y + Z) \approx \frac{1}{2}(X + 1)$$

$$\mu_e \approx \frac{2}{1 + X}$$

Dla Słońca X = 0.7, więc: $\mu_e \approx 1.18$

A dla X = 0: $\mu_e \approx 2$

Mieszanina gazów doskonałych

$$P = \sum P_{jony} + P_e = \left(\sum_i n_i + n_e\right) kT = nkT$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_e} + \frac{1}{\mu_{jony}} = \sum_i \frac{(Z_i + 1) X_i}{A_i}$$

średnia masa atomowa cząstki
(mean molecular weight)

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T$$

Dla gazu w pełni zjonizowanego:

$$\mu \approx \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$$

Dla Słońca: $\mu \approx 0.63$

A dla X = 0: $\mu \approx 1.34$

Mieszanina gazów doskonałych

Widzimy więc, że mieszanina gazów doskonałych jest gazem doskonałym.
Zmienia się tylko współczynnik proporcjonalności pomiędzy P i T.

Mamy więc równanie dla jednoskładnikowego gazu doskonałego:

$$P = nkT$$

Oraz równanie dla mieszaniny gazów doskonałych:

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T$$

Co możemy powiedzieć o ewolucji gwiazd na ciągu głównym na podstawie zdobytych informacji?

Proste zmiany ewolucyjne

Jak dowiemy się później temperatura centralna nie może silnie się zmieniać, jeśli nie zmienia się tempo syntezy helu, a tempo to jest stałe ze względu na samostabilizującą naturę samograwitujących kul gazowych.

$$T_c \approx const$$

Jeśli tak to z równania gazu doskonałego mamy, że:

$$P_c \mu_c = A_{const} \rho_c$$

Z drugiej strony z równania równowagi hydrostatycznej oszacowaliśmy, że:

$$P_c \approx G \frac{M_{gw}^2}{R_{gw}^4} \approx G M_{gw} \frac{\bar{\rho}}{R_{gw}}$$

A ponieważ masa gwiazdy się za bardzo nie zmienia, więc

$$P_c R_{gw} = B_{const} \bar{\rho}$$

Przyjmując, że gęstość centralna i średnia zmienia się w proporcjonalny do siebie sposób mamy:

$$\mu_c = C_{const} R_{gw}$$

Proste zmiany ewolucyjne

Widzimy więc, że wzrost średniej masy cząsteczkowej powinien powodować
wzrost promienia gwiazdy!

Wzrost promienia oznacza, że maleje ciśnienie centralne dzielone przez średnią gęstość:

$$P_c R_{gw} = B_{const} \bar{\rho}$$

Może to oznaczać:
wzrost ciśnienia i większy wzrost gęstości
spadek gęstości i większy spadek ciśnienia

Z szacunków ciśnienia centralnego wynika, że powinno ono spaść:

$$P_c \approx G M_{gw}^2 / R_{gw}^4$$

Tym razem szacowanie zawodzi, bo choć promień gwiazdy rośnie, to masa
we wnętrzu się koncentruje (promień mediany masy maleje),
co powoduje wzrost ciśnienia centralnego, co daje również wzrost gęstości materii.

Proste zmiany ewolucyjne

Podsumowując nasze szacunki:

W wyniku syntezy helu rośnie średnia masa cząsteczkowa i dlatego rośnie ciśnienie, gęstość i temperatura centralna. Rośnie też promień gwiazdy. A z powyższych równań wynika, że względny wzrost gęstość jest największy spośród wszystkich tych wielkości.

Sprawdźmy dla różnych gwiazd w WTTS.