

Astrofizyka IV

# **Wnętrza, ewolucja i pulsacje gwiazd.**

Krzysztof Kamiński

Temat wykładu

Równania stanu c.d.

W poprzednim odcinku

Średnia droga swobodna fotonu:  $l_{ph} = \frac{1}{\kappa \rho} \sim 0.25 \text{ cm}$

Całki gazowe:  $n = \int_0^\infty n(p) dp$

$$U = \int_0^\infty \epsilon_p n(p) dp = n \langle \epsilon_p \rangle$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty p v_p n(p) dp = \frac{1}{3} n \langle p v_p \rangle$$

Energia wewnętrzna gazu:  $P = 2/3 U$  (*nie rel.*)       $P = 1/3 U$  (*ext. rel.*)

Gaz doskonały:  $P = nkT$        $P = \frac{R}{\mu} \rho T$

## Co dalej po gazie doskonałym

Czy uzasadnione jest stosowanie przybliżenia gazu doskonałego dla gwiazd?

Czy materia gwiazdowa nie powinna być opisywana innymi równaniami stanu?

Kiedy i jakie inne równania stanu należy używać?

## Gaz zdegenerowany

Z zasady nieoznaczoności:

$$\Delta x \Delta p \geq h$$

Z zasady nieoznaczoności w 3D:

$$\Delta V \Delta^3 p \geq h^3$$

$h^3$  definiuje objętość sześciowymiarowego elementu przestrzeni objętości  $V$  i pędu  $p$

Liczba dopuszczalnych stanów kwantowych w objętości  $V$  dla cząstek o pędach pomiędzy  $p$  oraz  $p+dp$ :

$$g(p) dp = g_s \frac{(V)(4\pi p^2 dp)}{h^3}$$

Ilość dopuszczalnych stanów kwantowych danej cząstki

### Fermiony

elektrony, nukleony

spin połówkowy

zakaz Pauliego!

### Bozony

fotony

spin całkowity

## Degeneracja elektronowa

Elektron to fermion z dwoma stanami spinu:  $g_s = 2$

Maksymalna dopuszczalna ilość elektronów na jednostkę objętości:

$$n_{max}(p) dp = \frac{g(p) dp}{V} = \frac{8\pi p^2}{h^3} dp$$

Ułamek stanów kwantowych zajętych przez fermiony o energii  $\epsilon_p$ , w temperaturze T można opisać równaniem:

$$f_{FD}(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} + 1} \leq 1 \quad \mu - \text{potencjał chemiczny (stała normalizująca ilość cząstek opisanych równaniem do n)*}$$

W nierelatywistycznym przypadku:  $\epsilon_p = p^2 / 2 m_e$

$$n_e(p) dp = n_{max}(p) f(\epsilon_p) dp = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{p^2/2 m_e kT - \psi} + 1} 4\pi p^2 dp$$

$\psi = \mu/kT$  - parametr degeneracji\*

\* - wynika z konieczności normalizacji:  $n = \int_0^\infty n(p) dp$

## Degeneracja elektronowa

Rozkład pędów dla nierelatywistycznych elektronów  
(iloczyn  $n_{\max}(p)$  i  $f(e_p)$ ):

Fermiego-Diracka

$$n_e(p) dp = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{p^2/2m_e kT - \psi} + 1} 4\pi p^2 dp$$

Dla porównania, rozkład pędu w klasycznym ujęciu:

Maxwella-Boltzmannna

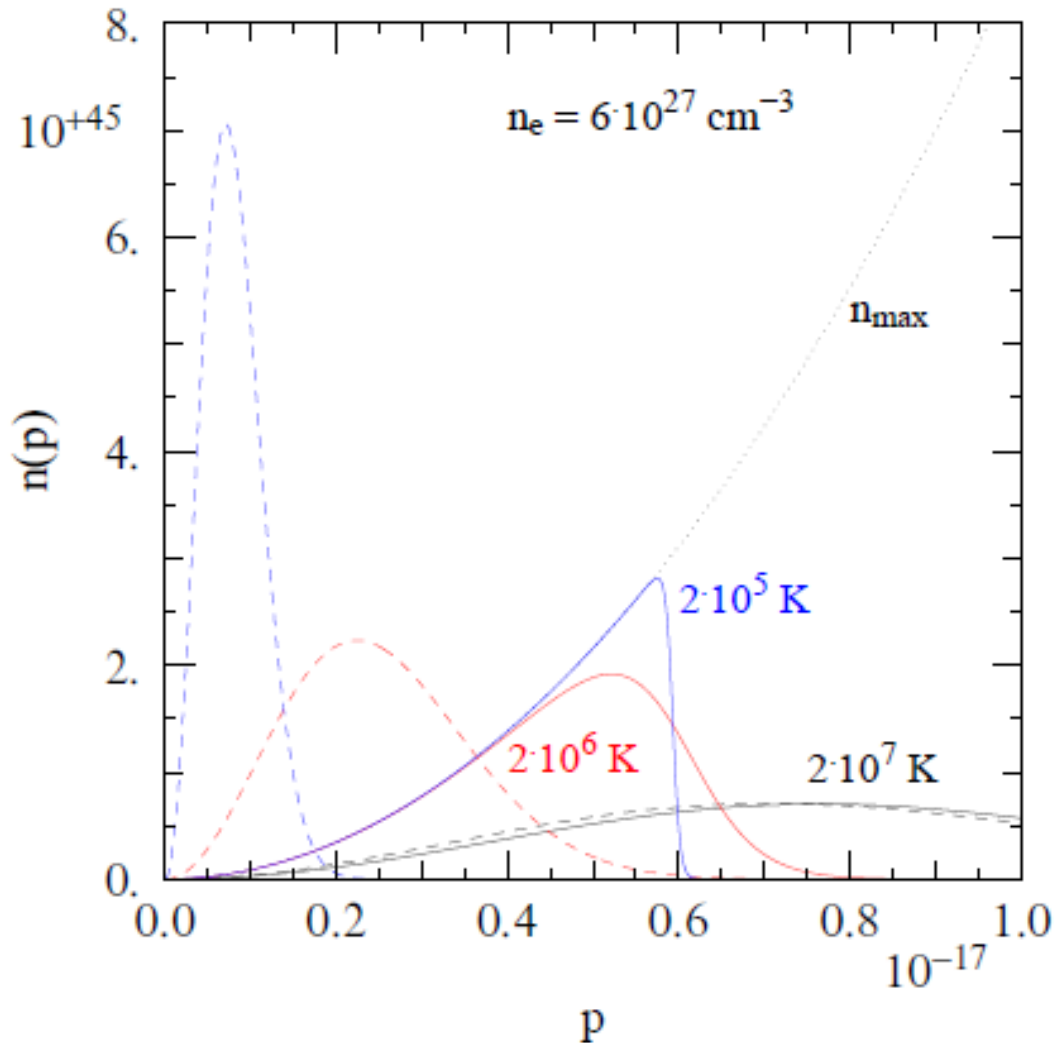
$$n_e(p) dp = \frac{n_e}{2\pi m_e k T^{3/2}} \frac{1}{e^{p^2/2m_e kT}} 4\pi p^2 dp$$

Co się dzieje gdy parametr degeneracji  $\psi \ll 0$  ?

$$\frac{1}{e^{p^2/2m_e kT - \psi} + 1} = \frac{1}{e^{p^2/2m_e kT + \psi}}$$

A więc rozkład F-D redukuje się do rozkładu M-B!

## Degeneracja elektronowa



Rozkład bez zakazu Pauliego (linie przerywane), rozkład z zakazem Pauliego (linie ciągłe).

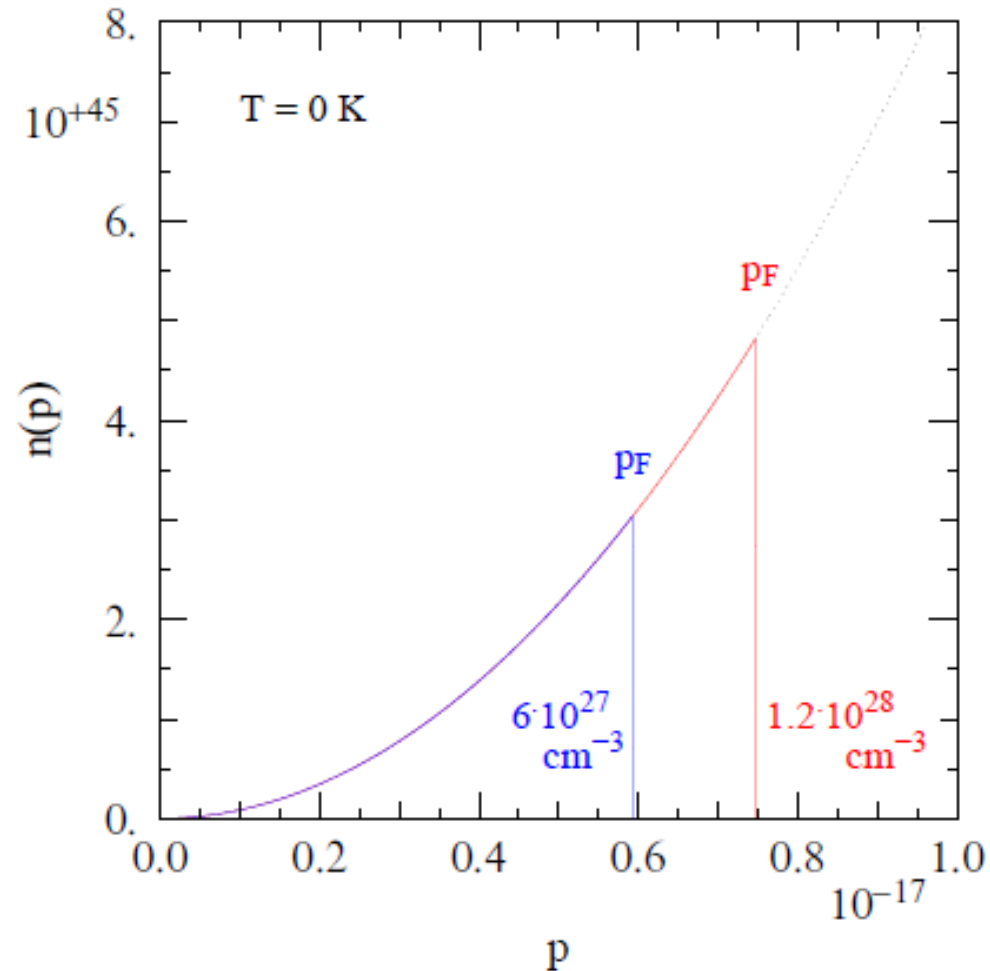
Zakaz Pauliego zmusza elektrony do zajęcia stanów o większym pędzie – ciśnienie degeneracji.

Dla niskich temperatur prawie nie ma elektronów powyżej pewnej wartości  $p$ .



## Całkowita degeneracja elektronowa

Gdy  $T$  dąży do 0, degeneracja dąży do następującego rozkładu:



Sytuacja ta jest dobrym przybliżeniem rozkładu dla niskich temperatur, dla których zmiana temperatury praktycznie nie zmienia rozkładu pędów, a więc nie zmienia ciśnienia gazu!

## Całkowita degeneracja elektronowa

Gdy  $T$  dąży do 0, degeneracja dąży do stanu:

$$n_e(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3} \quad p \leq p_F$$

$$n_e(p) = 0 \quad p > p_F$$

Gdzie pęd Fermiego (graniczny)  $p_F$  spełnia warunek:

$$\int_0^{p_F} n_e(p) dp = n_e$$

Co pozwala obliczyć pęd Fermiego (graniczny):

$$p_F = h \left( \frac{3}{8\pi} n_e \right)^{1/3}$$

## Całkowita degeneracja elektronowa

Jakie ciśnienie wywiera gaz zdegenerowany?

Całka ciśnienia:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp$$

W przypadku nierelatywistycznym:  $v = p/m$

A więc ciśnienie całkowite zdegenerowanego gazu elektronowego wynosi:

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^4}{h^3 m_e} dp = \frac{h^2}{20 m_e} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3}$$

$$n_e \equiv \frac{1}{\mu_e} \frac{\rho}{m_u}$$

$\mu_e$  – średnia masa cząsteczkowa na 1 wolny e

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$$

## Całkowita degeneracja elektronowa

Gdy gęstość materii dalej rośnie część  $e^-$  osiąga prędkości bliskie  $c$ .

W przypadku ekstremalnie relatywistycznym:  $v = pc^2/\epsilon$   $v = c$

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \frac{8\pi c p^3}{h^3} dp = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

$$P_e = K_{ER} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$$

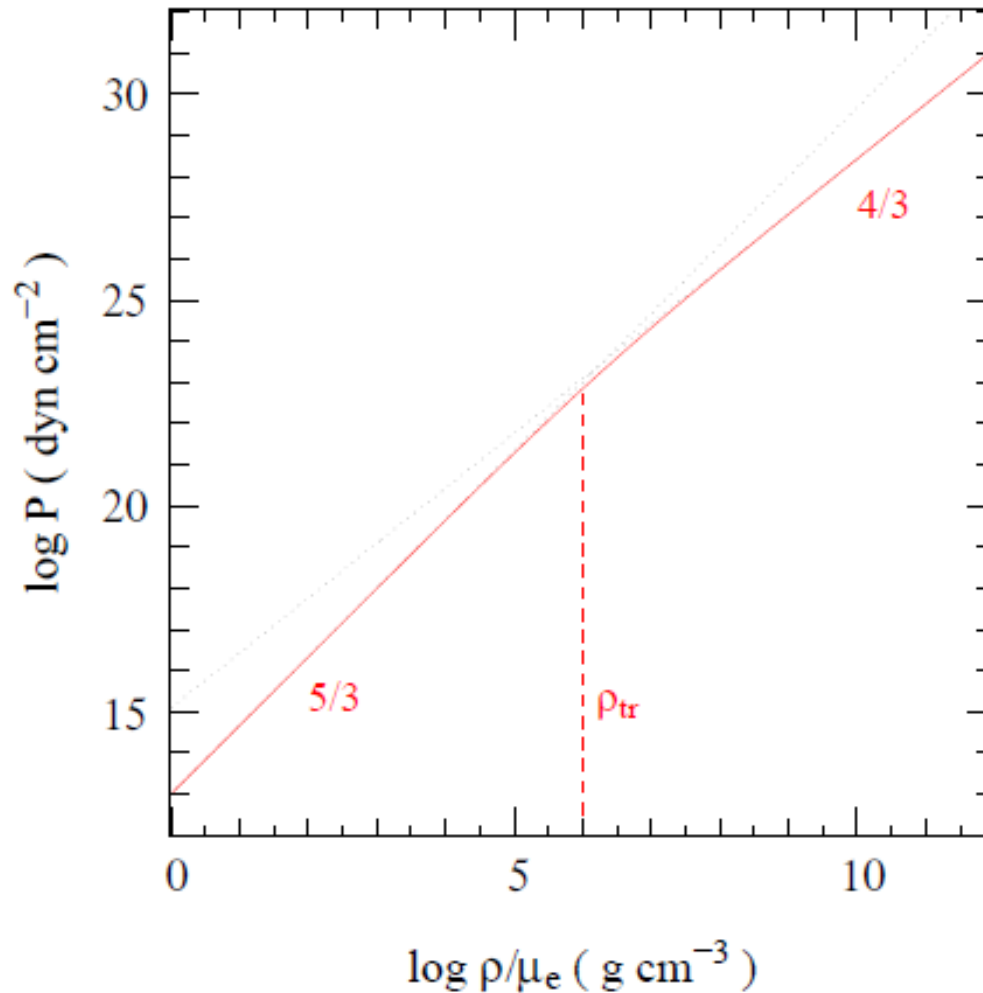
$P_e$  nie zależy od  $T$  !!!

Dla porównania dla gazu doskonałego:

$$P = R_{specific} \rho T$$

$$P \propto \rho^{(5/3)} \quad \leftarrow \text{dla przemiany adiabatycznej}$$

## Całkowita degeneracja elektronowa



Z warunku  $p_F = mc$  można pokazać, że:

$$\rho_{tr} \approx \mu_e m_u \frac{8\pi}{3} \left( \frac{m_e c}{h} \right)^3 \approx 10^6 \mu_e \text{ g cm}^{-3}$$

## Degeneracja częściowa

Przejście pomiędzy gazem doskonałym a zdegenerowanym jest **płynne**.

$$n_{limit} \approx \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} = 4.8 \cdot 10^{15} T^{3/2} [cm^{-3}]$$

Całkowita degeneracja:  $\psi = \mu/kT \gg 0$   $n_e \gtrsim 10 n_{limit}$

Częściowa degeneracja:  $\psi = \mu/kT \sim 0$   $n_e \gtrsim n_{limit}$

Gaz doskonały:  $\psi = \mu/kT \ll 0$   $n_e < n_{limit}$

Obliczenie całki ciśnienia dla pełnego rozkładu F-D jest dość skomplikowane. Rozwiązanie wymaga zastosowania tzw. całek Fermiego-Diraka:

$$F_j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^\infty \frac{t^j}{e^{t-x} + 1} dt, \quad (j > 0)$$

## Znaczenie degeneracji gazu elektronowego

$$P_e = K_{NR} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} = 1.0 \cdot 10^{13} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{5/3} [1 b = 1 \text{ baria} = 1 \text{ dyn/cm}^2 = 0.1 \text{ Pa}]$$

$$P_e = R \rho T = 8.3 \cdot 10^7 \rho T [1 b]$$

Kiedy dominuje ciśnienie degeneracji, a kiedy gazu doskonałego?

Do utrzymania równowagi hydrostatycznej nie potrzeba wysokiej temperatury wnętrza!

Przypadek relatywistyczny obowiązuje dla masywnych białych karłów i sprawia, że (jak zobaczymy) mają one limit masy całkowitej.

## Znaczenie degeneracji gazu elektronowego

Degeneracja jonów jest nieistotna:

po pierwsze jony mają większe pędy, więc degeneracja występuje dla znacznie większych gęstości:

$$\frac{m_{jon} \langle v_{jon} \rangle^2}{2} = \frac{m_e \langle v_e \rangle^2}{2} \quad m_{jon} > 2000 m_e \quad v_{jon} < \sqrt{2000} v_e$$
$$m_{jon} v_{jon} > \sqrt{2000} m_e v_e$$

po drugie, zanim ona nastąpi większość protonów zmienia się w neutrony i materia staje się neutralna, więc przestaje być zjonizowana.

Degeneracja neutralnego gazu neutronowego jest istotna dla gwiazd neutronowych!



# Syriusz B

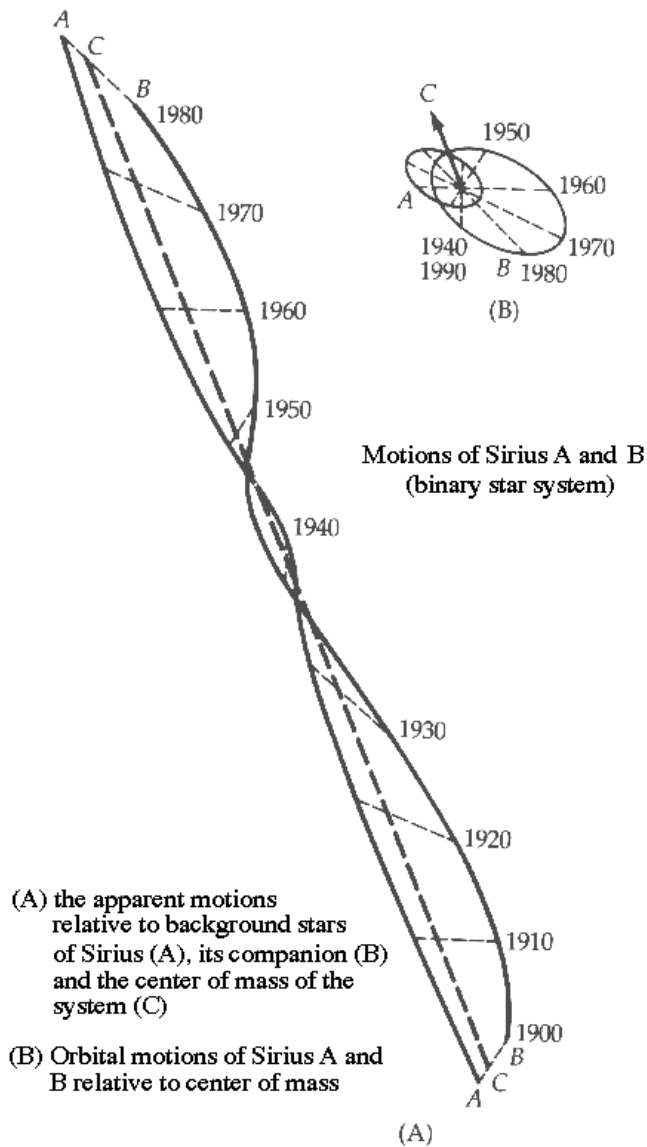
Fryderyk Bessel zauważył w 1844 niewielkie nieregularności w ruchu własnym Syriusza powtarzające się co ok. 50 lat.

Bessel zasugerował istnienie niewidocznego składnika – pierwszy raz w historii obserwacji gwiazd!

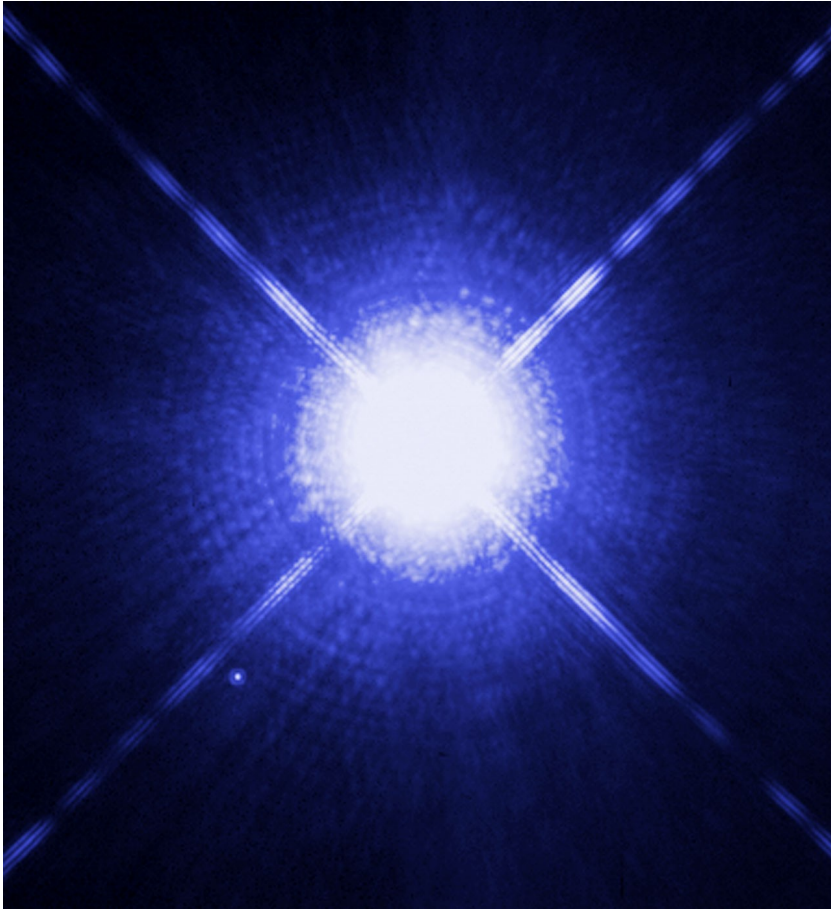
Alvan i Alvan (ojciec i syn) Clark (Clark & Sons) testowali w 1862r największy na świecie refraktor o średnicy 18.5" i jako pierwsi dostrzegli Syriusza B.

Grzegorz Bond – dyrektor Obserwatorium w Harvardzie – natychmiast potwierdził odkrycie Clarków za pomocą 15" refraktora i opublikował je.

Le Verrier również próbował zaobserwować „ciemnego towarzysza” Syriusza za pomocą pierwszego na świecie reflektora z metalizowanym lustrem w Obserwatorium w Paryżu.



## Syriusz B



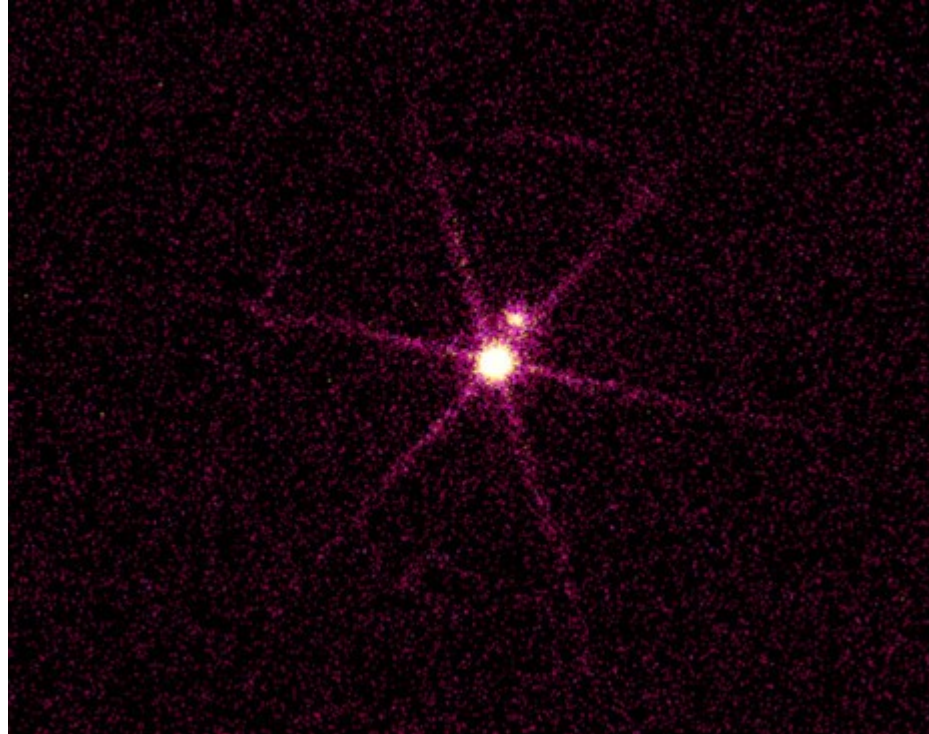
HST

Walter Adams w 1915 roku otrzymał pierwsze widmo Syriusza B i wyznaczył temperaturę – 3x większa niż Syriusza A.

To pozwoliło oszacować rozmiar gwiazdy, w przybliżeniu odpowiadający rozmiarowi Ziemi, przy masie zbliżonej do masy Słońca. Z tego wynika olbrzymia gęstość obiektu!

Subrahmanyan Chandrasekhar w 1930 roku zastosował zakaz Pauliego do równań budowy gwiazdy i opracował pierwszą teorię budowy białych karłów.

## Syriusz B



Teleskop Chandra.

W zakresie miękkiego promieniowania X Syriusz B jest znacznie jaśniejszy niż Syriusz A. Syriusz A jest tu w ogóle widoczny tylko ze względu na niedoskonały filtr odcinający FUV.

## Ciśnienie promieniowania

Fotony to bozony z dwoma stanami polaryzacji:  $g_s = 2$

Rozkład energii Bosego-Einsteina:

$$f_{BE}(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} - 1}$$

Rozkład pędów:

$$n(p) dp = \frac{2}{h^3} \frac{1}{e^{\epsilon_p/kT} - 1} 4\pi p^2 dp \quad (\mu = 0)$$

Ponieważ jak wiemy:  $\epsilon_p = pc = h\nu$

$$n(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \text{Rozkład Plancka!}$$

## Ciśnienie promieniowania

Ilość fotonów na jednostkę objętości:

$$n_{ph} = \int_0^{\infty} n(p) dp = b T^3$$

gdzie:

$$b = 20.3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3}$$

Energia wewnętrzna na jednostkę objętości (gęstość energii wewnętrznej):

$$U_{rad} = \int_0^{\infty} \epsilon_p n(p) dp = a T^4$$

gdzie:

$$a = \frac{8 \pi^5 k^4}{15 h^3 c^3} = 7.56 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

„radiation constant”

## Ciśnienie promieniowania

Gęstość energii wewnętrznej:

$$U_{rad} = a T^4$$

Ciśnienie ekstremalnie relatywistyczne:

$$P = \frac{1}{3} U$$

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

## Ciśnienie mieszaniny gazu i promieniowania

$$P = P_{rad} + P_{gaz} = P_{rad} + P_{jony} + P_e$$

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

$$P_{jony} = \frac{R}{\bar{\mu}_{jony}} \rho T$$

The diagram shows the symbol  $P_e$  on the left. Three arrows point from it to three equations on the right, representing different models for electron pressure:

- Top arrow:  $P_e = \frac{R}{\bar{\mu}_e} \rho T$
- Middle arrow:  $P_e = K_{NR} \left( \frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{5/3}$
- Bottom arrow:  $P_e = K_{ER} \left( \frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{4/3}$

## Gaz doskonały kontra gaz rzeczywisty

Gaz rzeczywisty (np. gaz van den Waalsa) – gaz w którym uwzględniamy m.in. oddziaływania międzycząsteczkowe.

Ciśnienie Coulomba – ciśnienie wynikające z oddziaływania elektrostatycznego pomiędzy jonami w plazmie.

$$P_c \propto \left( \frac{\pi}{kT} \right)^{1/2} (\rho n)^{3/2}$$

W warunkach panujących w gwiazdach ciśnienie Coulomba oraz wiele innych odstępstw od gazu doskonałego możemy na szczęście pominąć.

Ciśnienie Coulomba staje się dominujące w mało-masywnych brązowych karłach!



## Ciśnienie mieszaniny gazu i promieniowania

Gdy elektrony nie są zdegenerowane:

$$P = \frac{1}{3} a T^4 + \frac{R}{\mu} \rho T$$

Gdy elektrony są silnie zdegenerowane:

$$P_{jony} < P_e$$

Zwyczajowo  $\beta$  oznacza ułamek wkładu ciśnienia gazu w ciśnienie całkowite:

$$P_{gaz} = \beta P \qquad P_{rad} = (1 - \beta) P$$

$\beta = 0$       dominacja ciśnienia promieniowania

$\beta = 1$       dominacja ciśnienia gazu

## Ciśnienie mieszaniny gazu i promieniowania

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4 \quad P_{jony} = \frac{R}{\mu_{jony}} \rho T \quad P_e = \frac{R}{\mu_e} \rho T \quad P_e = K_{NR} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \quad P_e = K_{ER} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

W jakich obszarach na płaszczyźnie temperatura-gęstość dominują różnego rodzaju ciśnienia?

$$T \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0 \quad T \rightarrow \infty, \rho \rightarrow \infty$$

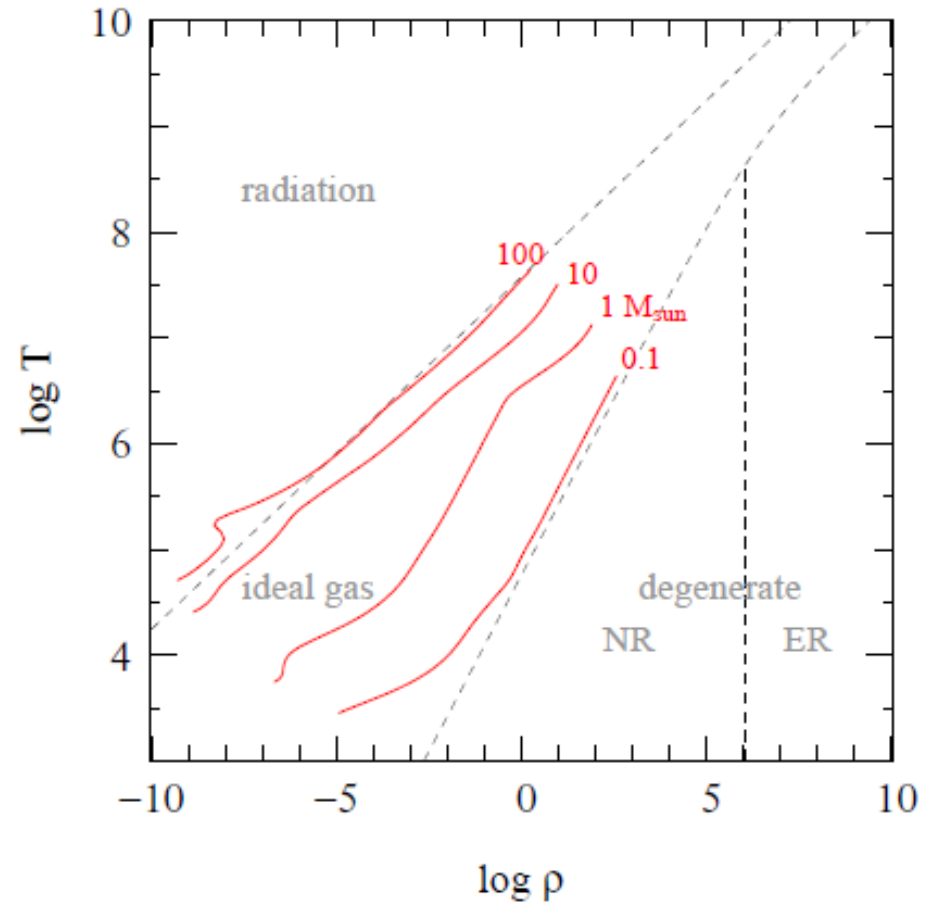
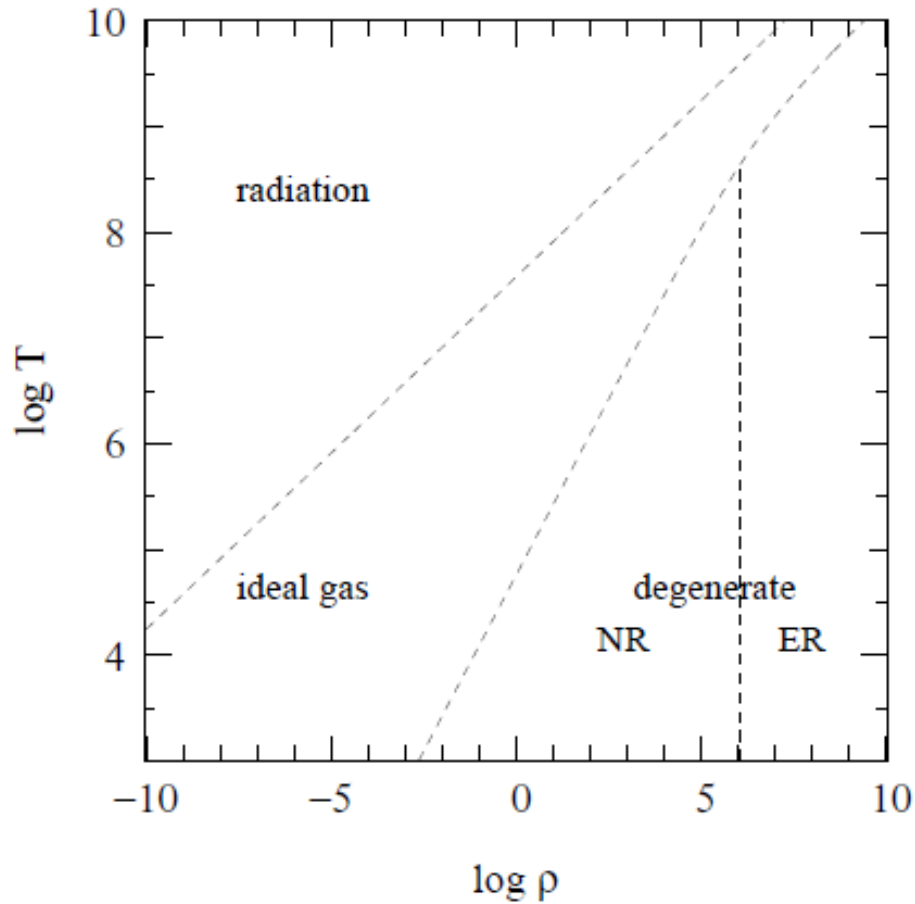
$$T \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0 \quad T \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$$

## Ciśnienie mieszaniny gazu i promieniowania

Ewolucja Słońca (zmiany ciśnienia, temperatury i gęstości we wnętrzu) WTTS

Ewolucja gwiazdy bardzo masywnej dla porównania WTTS?

## Ciśnienie mieszaniny gazu i promieniowania



Obszary dominacji różnych źródeł ciśnienia.  
Zaznaczone są modele wewnątrz gwiazd na ciągu głównym.

## Brązowe karły

Dlaczego gwiazdy o masach mniejszych niż ok.  $0.08 M_{\text{Sun}}$  nigdy nie osiągną temperatury niezbędnej do syntezy helu z wodoru?

Przecież w wyniku wypromieniowywania energii temperatury wewnątrz gwiazd powinny rosnać w nieskończoność?

Dlatego, że wcześniej materia w jądrze osiągnie gęstość i temperaturę degeneracji elektronowej, co skutecznie hamuje dalsze kurczenie i podgrzewanie.

W przypadku mało-masywnych brązowych karłów i w planetach olbrzymach dominujące staje się ciśnienie Coulomba.

Skutkiem odejścia od gazu doskonałego jest m.in. załamanie zależności masa-rozmiar. Rozmiary brązowych karłów różnią się od siebie w bardzo niewielkim stopniu (15%) w całym zakresie mas:  $13\text{-}65 M_{\text{J}}$ .