

Astrofizyka IV

Wnętrza, ewolucja i pulsacje gwiazd.

Krzysztof Kamiński

Temat wykładu

Równania stanu c.d.

W poprzednim odcinku

Całka ciśnienia gazu:
$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v_p n(p) dp = \frac{1}{3} n \langle p v_p \rangle$$

Ciśnienie gazu doskonałego:
$$P = nkT$$

Ciśnienie mieszanki gazów doskonałych:
$$P = \frac{R}{\bar{\mu}} \rho T$$

Ciśnienie całkowicie zdegenerowanego gazu elektronowego:

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{5/3} \qquad P_e = K_{ER} \left(\frac{\rho}{\bar{\mu}_e} \right)^{4/3}$$

Ciśnienie promieniowania:
$$P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

Co dalej po równaniach stanu?

Równania stanu są niezbędne by rozwiązać równania struktury mechanicznej gwiazd (równanie ciągłości i równanie równowagi hydrostatycznej).

Oprócz analizy stanu pełnej równowagi przydatna jest również analiza procesów związanych z zaburzeniem równowagi hydrostatycznej.

Procesy takie, ze względu na dynamiczną skalę czasu, będą oczywiście w pełni adiabatyczne. Przyjrzyjmy się opisowi gazu w takim przypadku.

Prawa termodynamiki

Pierwsza zasada termodynamiki (zasada zachowania energii):

Zmiana energii wewnętrznej układu jest równa sumie ciepła dostarczonego do układu i pracy wykonanej nad układem.

$$dU = \delta Q + \delta W + \sum_i \mu_i dN_i$$

to jest zmiana składu chem.
 μ – pot. chemiczny
 N – ilość cząstek

Praca wykonana przez układ w procesie quasi-statycznym:

$$\delta W = P dV$$

Druga zasada termodynamiki (kierunek procesów związanych z ciepłem):

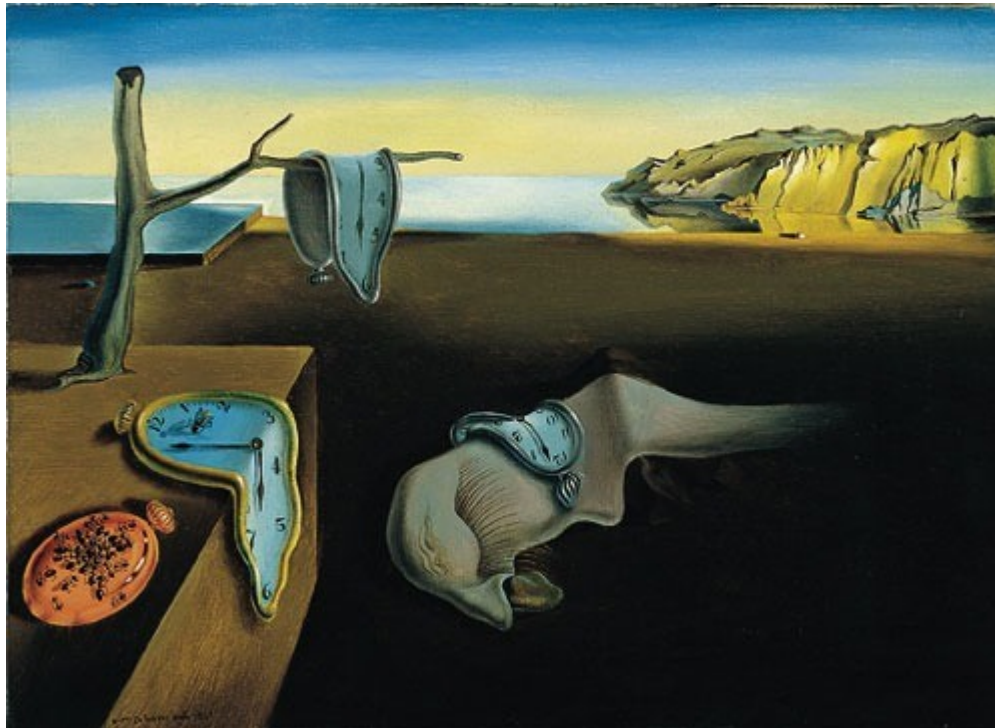
Istnieje entropia będąca funkcją stanu układu, w odwracalnych procesach (np. quasi-statycznych) zmiana entropii zależy od transferu ciepła i temperatury układu:

$$\delta Q = T dS$$

Uwaga! Ciepło i praca nie są funkcjami stanu (zależą nie tylko od stanu, ale i od sposobu przebiegu procesu), więc są oznaczone symbolem δ (różniczki niezupełne), dla odróżnienia od różniczki zupełnej d .

Entropia

Strzałka czasu!



W jaki sposób odwracalne procesy mikroskopowe doprowadzają do nieodwracalnych procesów termodynamicznych w makro świecie?

Kosmologiczna strzałka czasu!

Psychologiczna strzałka czasu!

Śmierć cieplna Wszechświata!

Prawa termodynamiki

Pomijając zmiany składu chemicznego można więc połączyć obydwie zasady:

$$dU = \delta Q - P dV \quad \delta Q = T dS$$

Co daje:

$$\delta Q = T dS = dU + P dV$$

Przejdźmy do wielkości „na gram”:

$$u = U/\rho \quad s = S/\rho \quad v = 1/\rho$$

Otrzymamy wyrażenie na zmianę ciepła dostarczonego jednostce masy gazu:

$$\delta q = T ds = du + P dv = du - \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

Uogólniona, różniczkowa forma równania stanu

Równanie stanu jest związkiem pomiędzy funkcjami stanu takimi jak: ciśnienie, gęstość, temperatura, entropia, energia wewnętrzna.

$$f(P, T, \rho) = 0$$

$$P = P(T, \rho)$$

Zmianę ciśnienia (funkcji stanu), w zależności od temperatury i gęstości, możemy więc zapisać jako różniczkę zupełną, w formie różniczkowej Pfaffa:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} dT + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T} d\rho$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} \frac{dT}{T} + \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log T} \right)_{\rho, X_j} = \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, X_j} \quad \chi_{\rho} = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_{T, X_j} = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T, X_j}$$

przy stałej gęstości
i składzie chemicznym

$$\frac{dP}{P} = \chi_T \frac{dT}{T} + \chi_{\rho} \frac{d\rho}{\rho}$$

Uogólniona, różniczkowa forma równania stanu

Forma różniczkowa:
$$\frac{dP}{P} = \chi_T \frac{dT}{T} + \chi_\rho \frac{d\rho}{\rho}$$

Jeśli χ_ρ i χ_T są stałe wówczas można napisać:

$$P = P_0 \rho^{\chi_\rho} T^{\chi_T}$$

W tej formie można przedstawić równania stanu:

gazu doskonałego	$\chi_\rho = \chi_T = 1$
promieniowania	$\chi_\rho = 0, \chi_T = 4$
gazu zdegenerowanego	$\chi_\rho = 5/3, \chi_T = 0$

Drobna uwaga wyjaśniająca

gaz doskonały – mamy na myśli zbiór cząstek w których wszystkie własności gazu pochodzą od cząstek gazu, a obecność promieniowania może być pominięta przy analizie własności termodynamicznych

promieniowanie – mamy na myśli mieszaninę gazu i fotonów w której ciśnienie fotonów dominuje nad ciśnieniem gazu, ale cząstek materialnych wcale nie pomijamy!

pełna nazwa to:
gaz zdominowany ciśnieniem promieniowania
„radiation-dominated gas”

Procesy adiabatyczne

Bez ciepła, bez zmiany entropii, szybkie (w dynamicznej skali czasu).

Wykładnik adiabatyczny:

Określa odpowiedź układu (zmianę ciśnienia gazu)

z powodu adiabatycznej zmiany gęstości (kompresji lub pęcznienia gazu).

$$\gamma_{ad} = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_{ad} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad \text{Istotny przy:}$$

stabilności dynamicznej

$$\text{Jeśli } \gamma_{ad} = \text{const} \quad \text{to} \quad P \propto \rho^{\gamma_{ad}} \quad PV^{\gamma_{ad}} = \text{const}$$

Adiabatyczny gradient temperatury:

Określa zmianę temperatury układu (gazu)

w rezultacie adiabatycznej zmiany ciśnienia (kompresji lub pęcznienia gazu).

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \log T}{\partial \log P} \right)_{ad} = \frac{P}{T} \frac{\partial T}{\partial P} \quad \text{Istotny przy:}$$

stabilności konwekcji

$$\text{Jeśli } \nabla_{ad} = \text{const} \quad \text{to} \quad T \propto P^{\nabla_{ad}}$$

Wykładnik adiabatyczny

Proces adiabatyczny: $dq=0$

$$dq = T ds = du + P dv = du - \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

Diagram illustrating the components of the equation above:

- ciepło (heat) points to dq
- entropia na gram (entropy per gram) points to ds
- energia wewn. na gram (internal energy per gram) points to du
- objętość jednostki masy (volume per unit mass) points to $d\rho$

Przyjmując że energia wewnętrzna gazu jest proporcjonalna do ciśnienia (jak zrobiliśmy na wykładzie nr 2 korzystając z tw. o wiriale dla gazu niedoskonałego):

$$u = \varphi \frac{P}{\rho}$$

stała między 3/2 (gaz dosk.) a 3 (gaz fot.)

Dostajemy:

$$\frac{dP}{P} = \frac{\varphi+1}{\varphi} \frac{d\rho}{\rho}$$

A więc zgodnie z definicją wykładnika adiabatycznego:

$$\gamma_{ad} = \frac{\varphi+1}{\varphi}$$

Wykładnik adiabatyczny

$$\gamma_{ad} = \frac{\varphi + 1}{\varphi} \quad (\text{dla gazu doskonałego})$$

Cząstki nierelatywistyczne*: $\varphi = \frac{3}{2}$ $\gamma_{ad} = \frac{5}{3}$

Cząstki ekstremalnie relatywistyczne: $\varphi = 3$ $\gamma_{ad} = \frac{4}{3}$

Mieszanina gazu i promieniowania: $0 \leq \beta \leq 1$ $\frac{4}{3} \leq \gamma_{ad} \leq \frac{5}{3}$

Można pokazać, że z różniczkowej formy równania stanu otrzymamy:

$$\gamma_{ad} = \chi_{\rho} + \frac{P}{\rho T c_V} \chi_T^2$$

* - gaz doskonały, ale również i zdegenerowany gaz elektronowy

Adiabatyczny gradient temperatury

Z definicji wykładnika γ_{ad} :

$$\frac{dP}{P} = \gamma_{ad} \frac{d\rho}{\rho}$$

Wykorzystując różniczkową formę równania stanu i definicję ad. grad. temp.:

$$\nabla_{ad} = \frac{\gamma_{ad} - \chi_{\rho}}{\gamma_{ad} \chi_T}$$

A korzystając z ogólnego wzoru na wykładnik γ_{ad} :

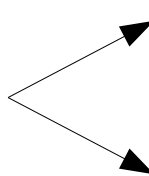
$$\nabla_{ad} = \frac{P}{\rho T c_p} \frac{\chi_T}{\chi_{\rho}}$$

Adiabatyczny gradient temperatury

Dla gazu doskonałego: $\chi_T = \chi_\rho = 1$ $\gamma_{ad} = \frac{5}{3}$ $\nabla_{ad} = \frac{2}{5} = 0.4$

Dla promieniowania: $\chi_T = 4, \chi_\rho = 0$ $\gamma_{ad} = \frac{4}{3}$ $\nabla_{ad} = \frac{1}{4} = 0.25$

Dla mieszanki: $\frac{4}{3} < \gamma_{ad} < \frac{5}{3}$ $0.25 < \nabla_{ad} < 0.4$

Gaz zdegenerowany:  normalnie: $\gamma_{ad} = \frac{5}{3}$ $\nabla_{ad} = 0.4$
ekstremalnie: $\gamma_{ad} = \frac{4}{3}$ $\nabla_{ad} = 0.5$

Dlaczego dla gazu zdegenerowanego (w którym P nie zależy od T) pojawił nam się adiabatyczny gradient temperatury?

Dlatego, że pomimo iż ciśnienie zdegenerowanego gazu elektronowego dominuje, to interesują nas własności również niezdegenerowanych składników mieszaniny jony+elektrony+promieniowanie (a więc chodzi tylko o niewielką składową ciśnienia degeneracji, w sumie zmiany całkowitego ciśnienia są bardzo niewielkie).

Adiabatyczny gradient temperatury

Z naszych rozważań wynika, że ciśnienie gazu zmienia się najszybciej wraz ze zmianą gęstości materii gdy:

1. dominuje ciśnienie gazu doskonałego lub zdegenerowanych nierelatywistycznych elektronów
2. dominuje ciśnienie relatywistyczne (fotonów lub elektronów)

Natomiast temperatura gazu zmienia się najszybciej wraz ze zmianą ciśnienia gdy:

1. dominuje ciśnienie ekstremalnie relatywistycznych elektronów
2. dominuje ciśnienie gazu doskonałego lub zdegenerowanych nierelatywistycznych elektronów
3. dominuje ciśnienie promieniowania

WTTS – przykład przebiegu adiabatycznego gradientu temperatury dla Słońca i gwiazd masywniejszych.

We wnętrzu Słońca gaz ma niemal ciągle gradient wynoszący 0.4, jak dla gazu doskonałego.

Odejście od wartości 0.4 w dół, do niemal 0.1 nie da się wyjaśnić obecnością materii zdegenerowanej lub dominacją ciśnienia promieniowania.

Co może być przyczyną tak istotnej zmiany termodynamicznych własności plazmy w zewnętrznych warstwach gwiazdy?

Jonizacja

Dotychczas rozważaliśmy jedynie przypadek całkowitej jonizacji gazu (lub gazu neutralnego), jest to dobre przybliżenie głęboko we wnętrzach gwiazd, gdy średnia energia kinetyczna jest znacznie większa niż energia jonizacji.

Gdy $T > 10^6$ K – jonizacja całkowita

Gdy $T < 10^6$ K – jonizacja częściowa

Częściowa jonizacja gazu jest nie tylko zmianą składu chemicznego, ale również ma wielki wpływ na własności termodynamiczne gazu!

Równanie Sachy:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} \frac{2(2\pi m_e k T)^{(3/2)}}{h^3} e^{-\chi_r/kT}$$

u_r - funkcje podziału (partycji, degeneracji)
liczba stanów jonu o tej samej energii
(zależą od T, ale można przybliżyć jako stałe)

χ_r - energia jonizacji

Jonizacja

Przykład dla gazu wodorowego:

$$P = (n_0 + n_1 + n_e) k T \quad \rho = (n_0 + n_1) m_u$$


Ponieważ:

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1$$

$$\frac{n_1}{n_0} n_e = \frac{(2 \pi m_e k T)^{(3/2)}}{h^3} e^{-\chi_H / k T}$$

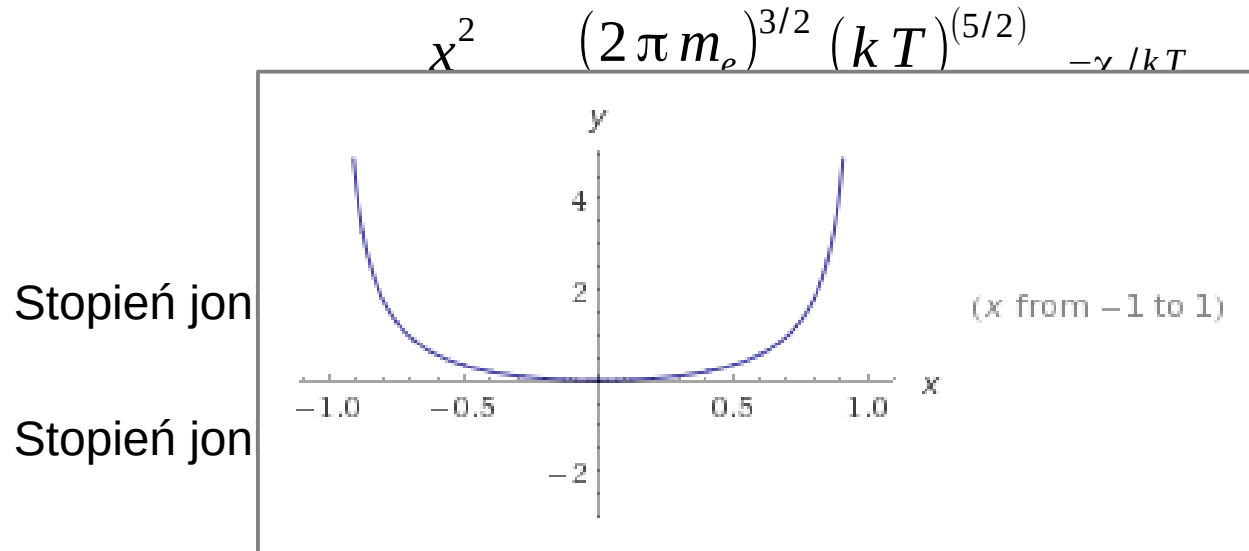
Definiując stopień jonizacji jako: $x = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ tak by $P = (1 + x) R \rho T$

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{(2 \pi m_e)^{3/2} (k T)^{(5/2)}}{h^3 P} e^{-\chi_H / k T}$$


$$\frac{1}{\bar{\mu}} = 1 + x$$

Jonizacja

Stopień jonizacji x gazu wodorowego wyraża się wzorem:



Energia wewnętrzna gazu zjonizowanego jest sumą:

+ normalnej termicznej energii wewnętrznej

+ energii możliwej do uwolnienia podczas rekombinacji

$$u = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} + x \frac{\chi_H}{m_u} = \frac{3}{2} (1+x) RT + x \frac{\chi_H}{m_u}$$

Energia wewnętrzna gazu zjonizowanego rośnie wraz ze stopniem jonizacji.

Jonizacja

Wyobraźmy sobie kompresję niezjonizowanego gazu doskonałego.

Początkowo w wyniku kompresji temperatura rośnie, gdyż praca wykonywana nad gazem jest zużywana na wzrost energii wewnętrznej:

$$T \propto P^{\nabla_{ad}} \quad \nabla_{ad} = 0.4$$

Później jednak pojawia się częściowa jonizacja, co oznacza, że tylko część energii jest zużywana na wzrost energii wewnętrznej:

$$\nabla_{ad} < 0.4$$

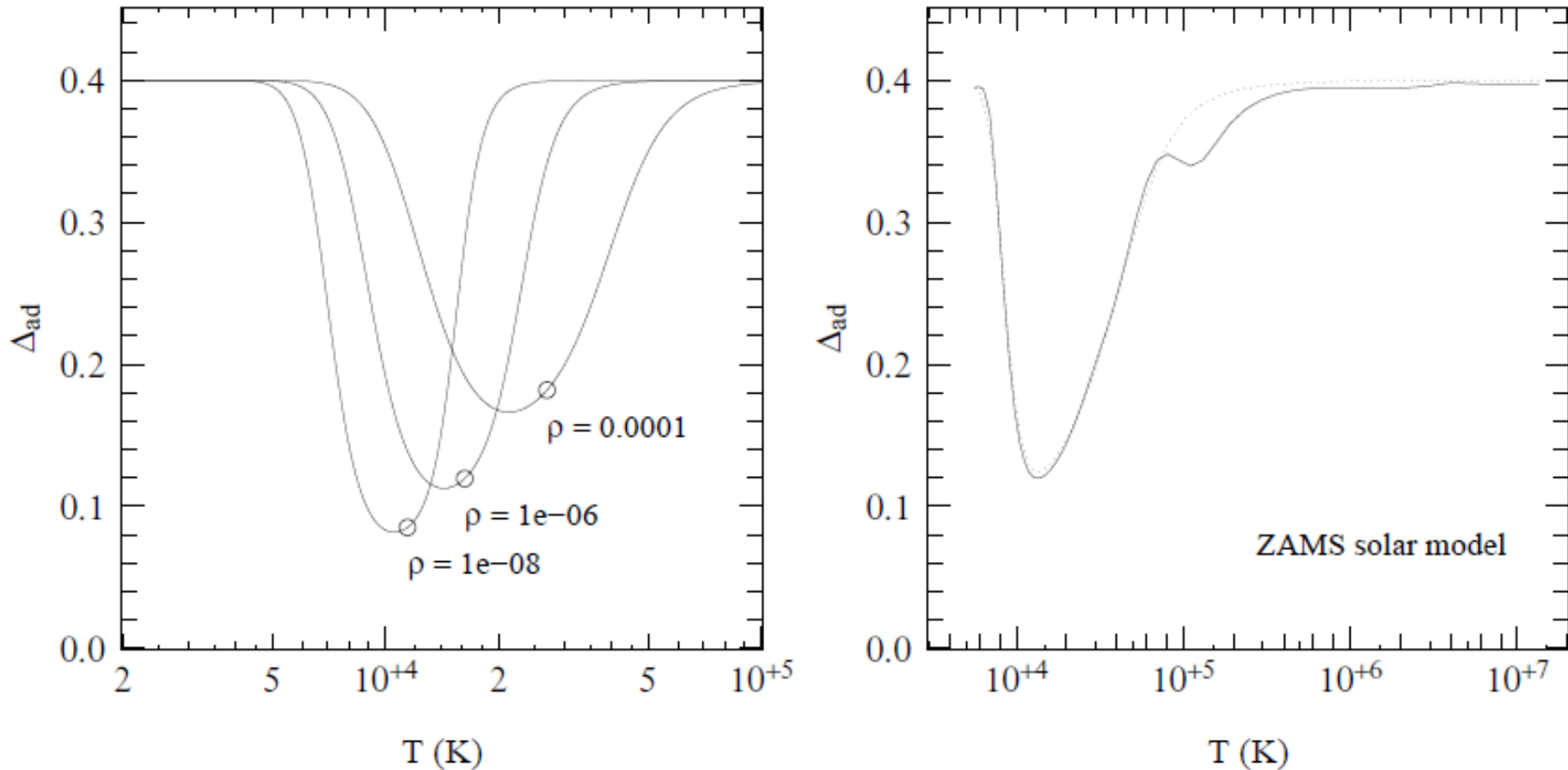
Gdy jonizacja staje się całkowita, sytuacja wraca do normy i dalsza kompresja powoduje wzrost temperatury typowy dla gazu doskonałego:

$$\nabla_{ad} = 0.4$$

Dla mieszaniny gazów sytuacja ta może się powtarzać wielokrotnie, gdyż różne składniki jonizują się przy różnych temperaturach.

Jonizacja

Adiabatyczny gradient temperatury w warunkach częściowej jonizacji:



Lewy: dla czystego wodoru, prawy dla modelu pełnego (linia ciągła) i czystego wodoru (linia przerywana).

Widać zależność stopnia jonizacji od temperatury (i pośrednio gęstości).

Jonizacja

W warstwach częściowej jonizacji γ_{ad} , ∇_{ad} maleją, osiągając minimum gdy $x \sim 0.5$:

$$\gamma_{ad} \approx 1.2 \quad \nabla_{ad} \approx 0.1$$

Dla mieszaniny gazów występuje wiele minimów γ_{ad} , ∇_{ad}

Jakie jest ciepło właściwe gazu częściowo zjonizowanego w stosunku do niezjonizowanego?

Znacznie większe:)

Jonizacja

Limit stosowania równania Sachy:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{(5/2)}}{h^3 P} e^{-\chi_H/kT} \quad P = (1+x) R\rho T$$

Gdy $\rho \rightarrow \infty$ wówczas $x \rightarrow 0$ co jest nonsensem.

W rzeczywistości gdy dystans między atomami jest porównywalny do rozmiarów atomów pojawia się **jonizacja ciśnieniowa**.

$$d = \left(\frac{4\pi}{3} n_H \right)^{-1/3} \lesssim a_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

$$\rho = n_H m_H \geq 3 \text{ g cm}^{-3}$$

Powyżej gęstości 10 g/cm^3 możemy założyć pełną jonizację (nie tylko wodoru).

Pozostałe efekty

Oddziaływania Kulombowskie:

$$d \approx \left(\frac{4\pi}{3} n \right)^{-1/3} \quad \text{typowy dystans pomiędzy cząstkami gazu}$$

$$\epsilon_C = Z^2 e^2 / d \quad \text{typowa energia oddziaływań kulombowskich}$$

$$\epsilon_{kin} = \frac{3}{2} kT \quad \text{typowa energia kinetyczna}$$

$$\Gamma_C = \frac{Z^2 e^2}{dkT} = \frac{Z^2 e^2}{kT} \left(\frac{4\pi\rho}{3Am_u} \right)^{1/3} \quad \text{parametr Kulomba (stosunek energii)}$$

$$\Gamma_C = 0.01 \frac{Z^2}{A^{4/3}} \left(\frac{M}{M_{sun}} \right)^{-2/3} \approx 1\% \quad \text{dla Słońca } Z \sim 1, A \sim 1$$

Ale dla $M < 0.001 M_{sun}$ (Jowisz) oddziaływania kulombowskie dominują!
Równania stanu dla planet są bardziej skomplikowane niż dla gwiazd.

Jakie oddziaływanie powoduje powstawanie siły nacisku lub uderzenia pomiędzy ciałami stałymi?

Pozostałe efekty

Krystalizacja jonów:

$$\Gamma_C > 170$$

Oddziaływania Kulombowskie dominują nad ruchami termicznymi. Istotne dla białych karłów, gdyż chłodzą się one przy stałej gęstości. Nie dotyczy elektronów, gdyż ich energia kinetyczna jest zawsze większa od energii oddziaływań kulombowskich.

Kreacja par e_- i e_+ :

$$kT \approx h\nu \approx 2m_e c^2 \quad T > 10^9 K$$

Możliwa tylko w obecności jąder atomowych dla zachowania pędu i E. Kreacji towarzyszy bardzo szybka anihilacja. Ustala się stan równowagi i pojawia stała populacja pozytonów. Efekt ten ma wpływ podobny do częściowej jonizacji (zmniejsza wykładnik adiabatyczny i adiabatyczny gradient temperatury) i jest istotny dla późnych stadiów ewolucji gwiazd (

Obszary występowania różnych efektów

