

Astrofizyka IV

Wnętrza, ewolucja i pulsacje gwiazd.

Krzysztof Kamiński

Temat wykładu

Transport energii - konwekcja

Na poprzednim wykładzie poznaliśmy uproszczony opis transportu energii przez promieniowanie stosowany we wnętrzach gwiazd: opis dyfuzyjny.

Równanie transportu promienistego:

$$\frac{dT}{dm} = - \frac{3 \kappa}{64 \pi^2 a c T^3} \frac{l}{r^4}$$

Równanie równowagi termicznej:

$$\frac{dl}{dm} = \epsilon_{nuk} - \epsilon_v - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Tym razem przyjrzymy się bliżej drugiemu najważniejszemu rodzajowi transportu energii we wnętrzach gwiazd – konwekcji.

Konwekcja

Transport promienisty z prędkością l (J/s) wymaga gradientu temperatury:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3 \kappa \rho}{16 \pi a c T^3} \frac{l}{r^2}$$

Równowaga hydrostatyczna we wnętrzu gwiazdy wymaga gradientu ciśnienia:

$$\frac{dP}{dm} = - \frac{Gm}{4 \pi r^4}$$

Jeśli transport promienisty wymaga takiego gradientu temperatury, który oznacza przekroczenie równowagowego gradientu ciśnienia wówczas zaburza równowagę.

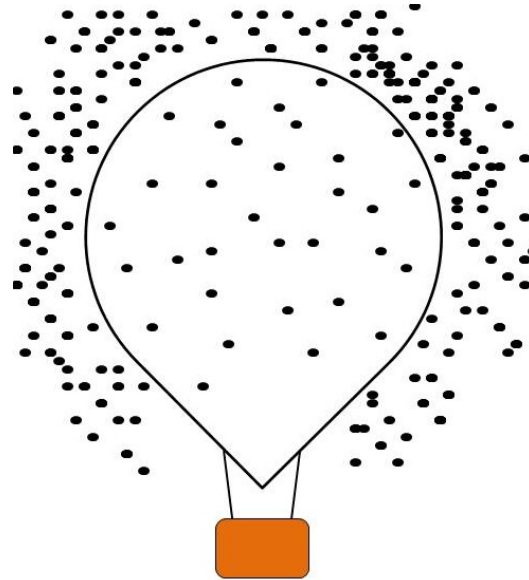
Zaburzenie to jednak występuje tylko lokalnie i nie prowadzi do rozpadu gwiazdy, tylko:

- wspomaga transport energii,
- prowadzi do wymieszania materii.

Mamy wówczas sytuację w której transport promienisty pracuje na maksymalnych obrotach, a nadmiar energii jest transportowany konwektywnie.

Konwekcja

Dlaczego balonik z ciepłym powietrzem unosi się w powietrzu?



Ciśnienie wewnątrz i na zewnątrz balonika są identyczne.

Temperatury są różne, czyli średnie energie kinetyczne muszą być różne.

To oznacza że cząstki gazu wewnątrz muszą rzadziej uderzać w ścianki balonu bo inaczej ciśnienia nie byłyby równe, czyli muszą być od siebie bardziej odległe.

W efekcie równowaga ciśnień może być utrzymana tylko przy różnicy gęstości.

Stabilność dynamiczna warstwy gwiazdy

Jeśli bąbel gazu we wnętrzu gwiazdy przypadkowo przesunie się do sąsiedniej warstwy (o tym samym składzie chem.) wówczas nastąpi sekwencja wydarzeń:

1. Bąbel napęcznieje w (swojej) dynamicznej skali czasu.
2. Bąbel będzie się ogrzewał lub ochładzał (ze względu na inną temperaturę nowej warstwy gazu) w skali czasu dłuższej niż dynamiczna.
3. Pęcznienie bąbla będzie więc niemal adiabatyczne i zakończy się gdy ciśnienie w bąblu wyrówna się z ciśnieniem w nowej warstwie.

$$P \propto \rho^{\gamma_{ad}}$$

4. W wyniku pęcznienia zmieni się gęstość gazu w naszym bąblu.

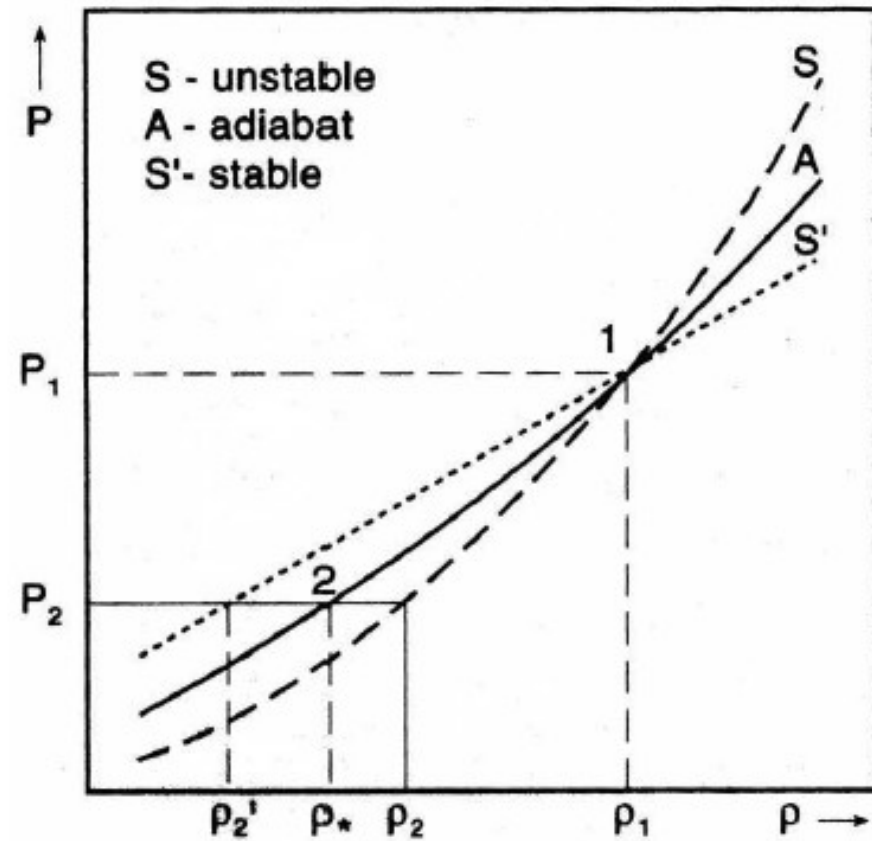
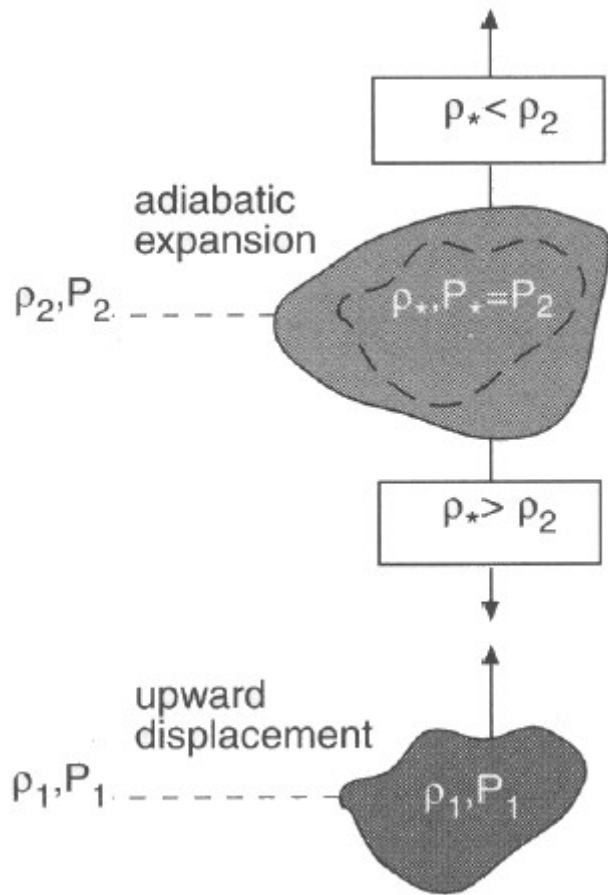
Pytanie:

Czy w momencie w którym ciśnienie się wyrówna gęstość też się wyrówna?

Nie, jeśli temperatury nadal będą różne.

Stabilność dynamiczna warstwy gwiazdy

Rozważamy dostatecznie duży bąbel gazu poruszający się pionowo. Jego ciśnienie będzie zawsze równe ciśnieniu otoczenia, ale gęstość będzie się zmieniać zgodnie z przemianą adiabatyczną.



$$P \propto \rho^{\gamma_{ad}}$$

Stabilność względem konwekcji

$$\gamma_{ad} = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_{ad} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

Rozważmy małą zmianę ciśnienia i gęstości podczas przemieszczenia o Δr :

$$\frac{\partial P_e}{P_e} = \gamma_{ad} \frac{\partial \rho_e}{\rho_e}$$

oczywiście: $P_e = P_2$ $\rho_e \neq \rho_2$

e – gaz po ekspansji

$$\partial P_e = P_2 - P_1 = (dP/dr) \Delta r$$

Adiabatyczna zmiana gęstości bąbla wynosi więc:

$$\partial \rho_e = \frac{\rho_e}{P_e} \frac{1}{\gamma_{ad}} \frac{dP}{dr} \Delta r$$

Faktyczna zmiana gęstości otoczenia bąbla wynosi zaś po prostu:

$$\delta \rho = \frac{d\rho}{dr} \Delta r$$

Stabilność względem konwekcji

Stabilność jest wówczas gdy $\rho_e > \rho_2$ co daje:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} < \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \frac{1}{\gamma_{ad}}$$

gdzie P_e i ρ_e zastąpiono przez P i ρ , korzystając z założenia niewielkiej perturbacji.

Finalnie otrzymujemy kryterium stabilności gazu względem makroskopowych ruchów materii:

$$\frac{d \log \rho}{d \log P} > \frac{1}{\gamma_{ad}}$$

$$\gamma_{ad} > \gamma_{faktyczne}$$

Stabilność jest wtedy gdy gęstość gazu w gwiazdzie zmienia się silniej, a ciśnienie słabiej niż w przemianie adiabatycznej (dla gazu doskonałego $\gamma_{ad} = 5/3$).

Ponieważ ruchowi gorących bąbli do góry towarzyszy ruch chłodnych bąbli na dół, więc transferowi energii nie towarzyszy transfer materii!

Kryterium stabilności Schwarzschilda i Ledoux

Przyjmijmy różniczkowe równanie stanu gazu w postaci:

$$P = P(\rho, T, \mu)$$

średnia masa cząsteczkowa

$$\frac{dP}{P} = \chi_T \frac{dT}{T} + \chi_\rho \frac{d\rho}{\rho} + \chi_\mu \frac{d\mu}{\mu}$$

gdzie

$$\chi_\mu = \left(\frac{\partial \log P}{\partial \log \mu} \right)_{\rho, T}$$

Dla gazu doskonałego:

$$\chi_\mu = -1$$

$$\frac{d \log \rho}{d \log P} = \frac{1}{\chi_\rho} \left(1 - \chi_T \frac{d \log T}{d \log P} - \chi_\mu \frac{d \log \mu}{d \log P} \right) = \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla - \chi_\mu \nabla_\mu)$$

gdzie

$$\nabla = \frac{d \log T}{d \log P}$$

$$\nabla_\mu = \frac{d \log \mu}{d \log P}$$

Kryterium stabilności Schwarzschilda i Ledoux

$$\frac{d \log \rho}{d \log P} = \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla - \chi_\mu \nabla_\mu)$$

$$\frac{1}{\gamma_{ad}} = \frac{1}{\chi_\rho} (1 - \chi_T \nabla - \chi_\mu \nabla_\mu) \quad \nabla_{ad} = \frac{\gamma_{ad} - \chi_\rho}{\gamma_{ad} \chi_T}$$

W takiej sytuacji kryterium stabilności $\frac{d \log \rho}{d \log P} > \frac{1}{\gamma_{ad}}$ przyjmuje postać:

$$\nabla < \nabla_{ad} - \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu$$

↳

Ledoux

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} - \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu$$

↳

Schwarzschild

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad}$$

Dla gazu doskonałego: $\chi_\mu = -1$, $\chi_T = 1$

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \nabla_\mu$$

W jednostkach jasności Eddingtona:

$$l < 4(1 - \beta) \nabla_{ad} l_{Edd}$$

Ponieważ zwykle średnia masa cząsteczkowa rośnie w kierunku wnętrza, więc ma to efekt stabilizujący, bo bąble masywniejszych cząstek łatwiej zatoną.

$$\nabla_\mu > 0$$

Występowanie konwekcji

Jak pamiętamy promienisty gradient temperatury wynosi:

$$\nabla_{rad} = \left(\frac{d \log T}{d \log P} \right)_{rad} = \frac{3}{16 \pi a c G} \frac{\kappa l P}{m T^4}$$

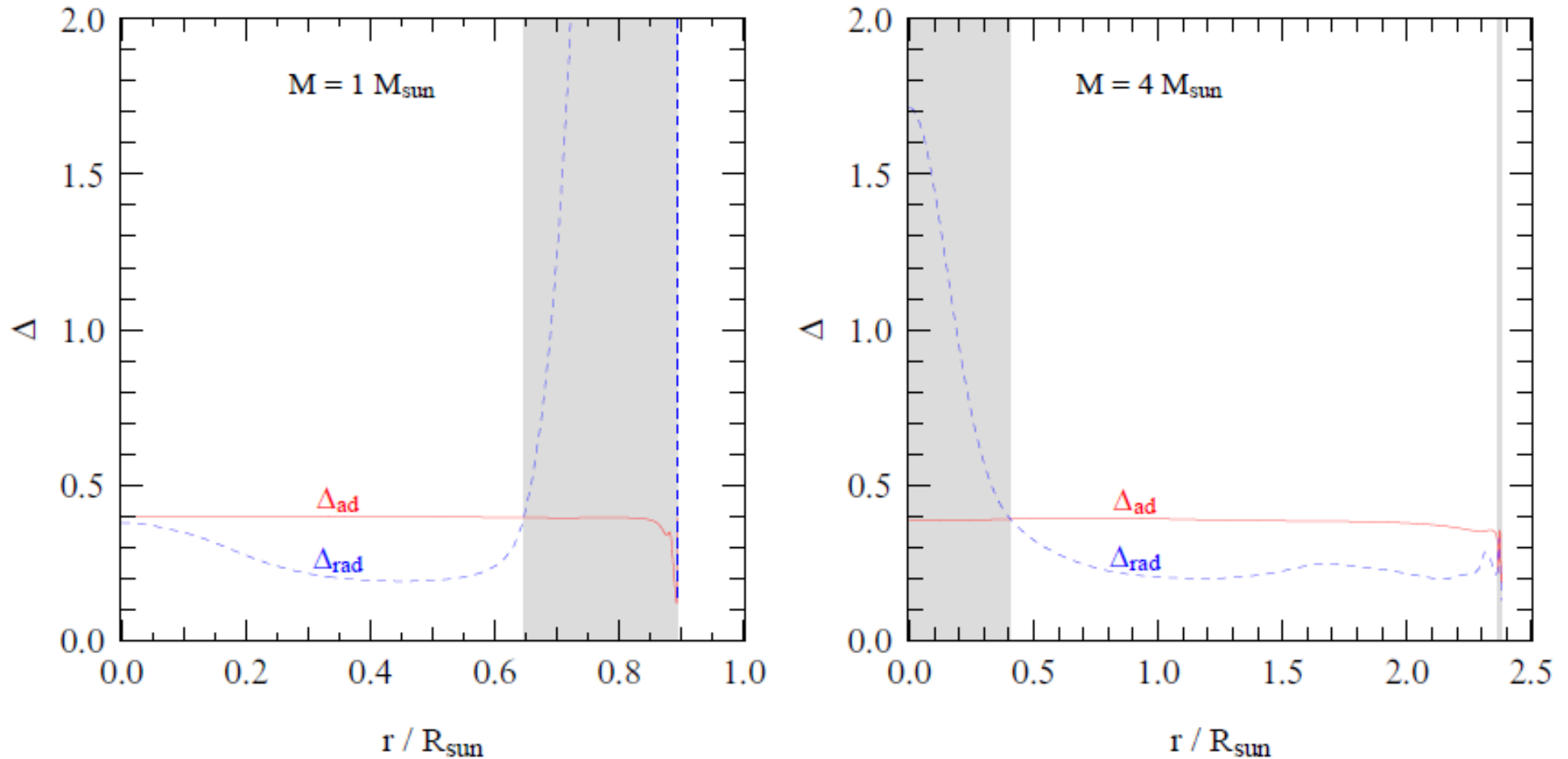
Zgodnie z kryterium Schwarzschilda warunkiem stabilności jest by:

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16 \pi a c G} \frac{P}{T^4} \frac{\kappa l}{m} < \nabla_{ad}$$

Gdy ten warunek nie jest spełniony może wystąpić konwekcja:

1. W obszary o dużej nieprzezroczystości. Nieprzezroczystość generalnie maleje ze wzrostem temperatury, więc w zewnętrznych warstwach chłodnych gwiazd.
2. W obszary o dużym strumieniu energii. W jądrach masywnych gwiazd.
3. W obszarach częściowej jonizacji, gdzie adiabatyczny gradient maleje. Gwiazdy o dowolnych masach powinny mieć płytką warstwę konwektywną przy powierzchni, w obszarach częściowej jonizacji wodoru i helu.

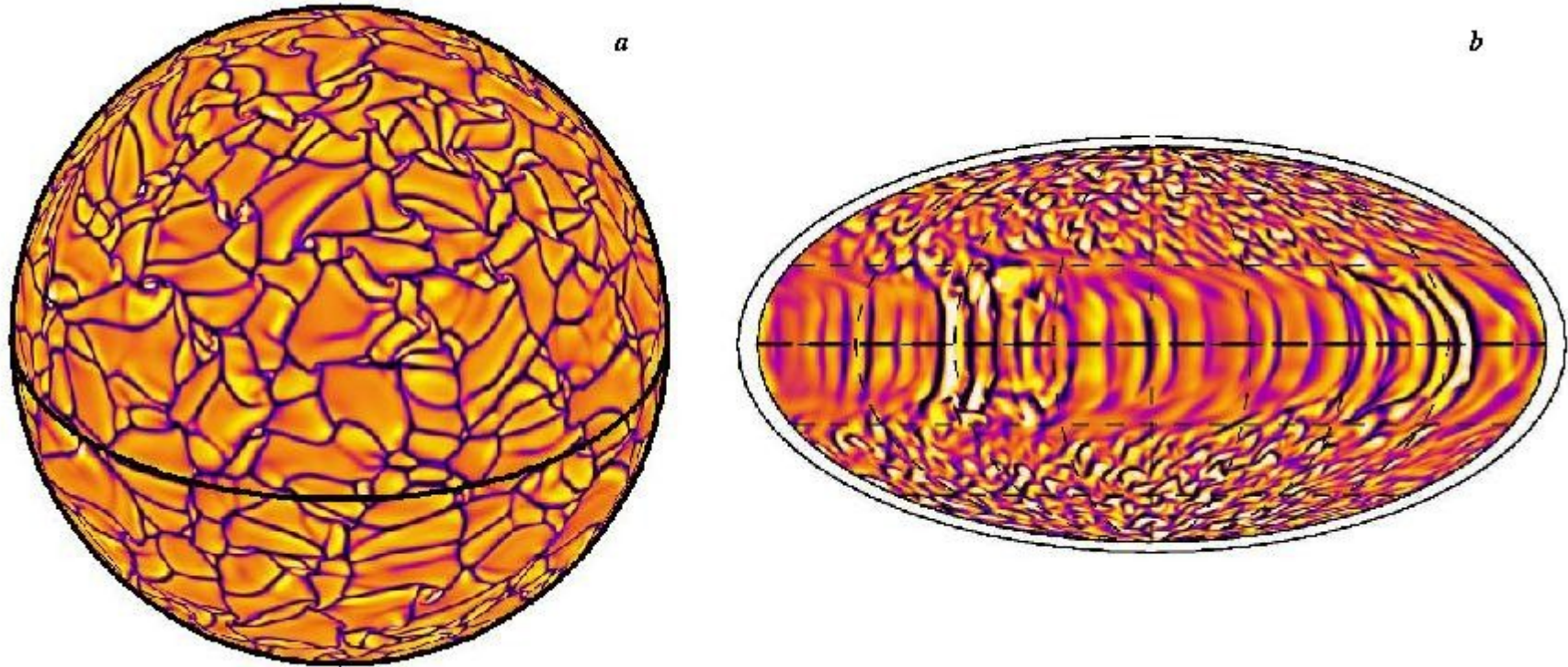
Występowanie konwekcji



Warstwy konwektywne w gwiazdach o różnych masach.

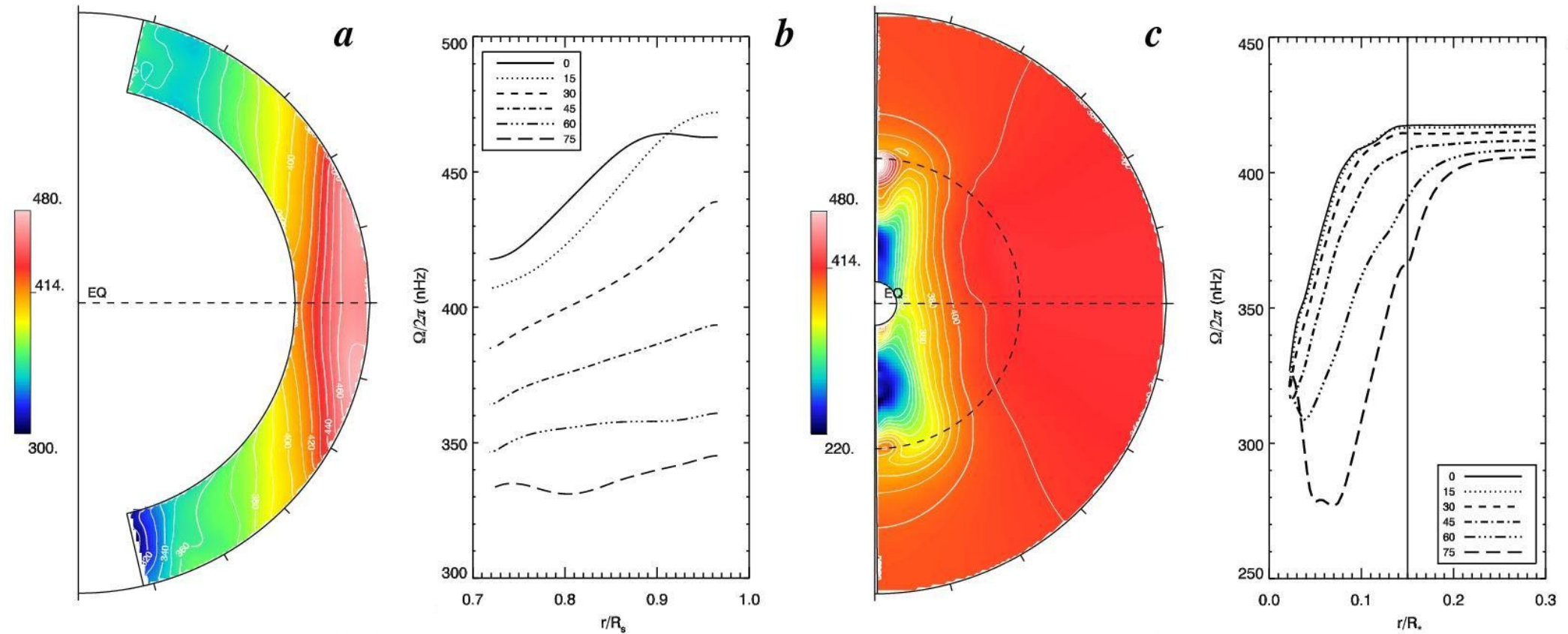
Przykłady innych mas w WTTs (0.1, 1.2, 50)!

Komórki konwektywne



Symulacje numeryczne komórek konwektywnych we wnętrzach gwiazdach o masie Słońca. Rozkład prędkości radialnych (w sensie wzdłuż promienia gwiazdy). Po lewej: gwiazda rotująca jak Słońce (Miesch et al 2008), po prawej 5x szybciej (Brown et al 2007). Widać wpływ siły Coriolisa na kształt komórek.

Rotacja gwiazd



Symulacje numeryczne rozkładu prędkości kątowej w dwóch przypadkach:

a) warstwa konwektywna we wnętrzu Słońca,

c) wnętrze gwiazdy o masie $2 M_{\text{Sun}}$ (Browning et al. 2004).

Widać rotację różnicową w warstwach konwektywnych.

Strumień energii konwektywnej

MLT – Mixing Length Theory

Można pokazać, że droga mieszania jest zbliżona do ciśnieniowej skali wysokości. Wynika to z prostego rozumowania, że bąble wznoszące się urosną tak, że zaczną zachodzić na siebie nawzajem i na bąble opadające.

$$l_m \approx H_P$$

$$H_P = \left| \frac{dr}{d \ln P} \right| = \frac{P}{\rho g}$$

Odległość po której ciśnienie P zmieni się e -krotnie.

Różnica temperatury pomiędzy bąblem a otoczeniem po przebyciu drogi l_m :

$$\Delta T = T_e - T_{\text{otoczenie}} = \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_e - \frac{dT}{dr} \right] l_m = \Delta \left(\frac{dT}{dr} \right) l_m$$

gradient temperatury bąbla
w wyniku rozprężenia

gradient temperatury
we wnętrzu gwiazdy

Konwektywny strumień energii

Ponieważ:

$$\frac{dT}{dr} = T \frac{d \ln T}{dr} = T \frac{d \ln T}{d \ln P} \frac{d \ln P}{dr} = -\frac{T}{H_P} \nabla$$

oraz

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_e = -\frac{T}{H_P} \nabla_{ad}$$

więc

$$\Delta T = T \frac{l_m}{H_P} (\nabla - \nabla_{ad})$$

Pojedynczy bąbel gazu ma nadwyżkę energii wewnętrznej w stosunku do otoczenia:

$$\Delta u = c_p \Delta T \quad \text{na jednostkę masy.}$$

Przy prędkości ruchu bąbla v_c strumień energii można zapisać jako:

$$F_{conv} = v_c \rho \Delta u = v_c \rho c_p \Delta T$$

Konwektywny strumień energii

Przyspieszenie działające na bąbel gazu doskonałego ($P \propto \rho T$) – siła wyporu:

$$a = -g \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx g \frac{\Delta T}{T}$$

Średnia prędkość ruchu bąbla:

$$v_c \approx l_m / t = \sqrt{\frac{1}{2} l_m g \frac{\Delta T}{T}} = \sqrt{\frac{l_m^2 g}{2 H_P} (\nabla - \nabla_{ad})}$$

Co daje nam ostatecznie:

$$F_{conv} = \rho c_P T \left(\frac{l_m}{H_P} \right)^2 \sqrt{\frac{1}{2} g H_P (\nabla - \nabla_{ad})^{3/2}}$$

superadiabatyczność

Konwektywny gradient temperatury

Szacunkowo przyjmujemy:

$$\rho \approx \bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3} \quad T \approx \bar{T} \sim \frac{\mu}{\mathfrak{R}} \mathfrak{R} \frac{GM}{R} \quad c_P = \frac{5}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu}$$

$$\sqrt{g H_P} = \sqrt{\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mu} T} \approx \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Z tego można wyprowadzić przybliżoną zależność:

$$F_{conv} \sim \frac{M}{R^3} \left(\frac{GM}{R} \right)^{3/2} (\nabla - \nabla_{ad})^{3/2}$$

A upraszczając dalej: $F_{conv} = 1/4 \pi r^2 \sim L/R^2$

$$\nabla - \nabla_{ad} \sim \left(\frac{LR}{M} \right)^{3/2} \frac{R}{GM}$$

Co dla Słońca przyjmuje wartość zaledwie: $\nabla - \nabla_{ad} \sim 10^{-8}$

To właśnie dzięki temu gwiazda jest stabilna pomimo konwekcji

Konwektywny transport energii

Głęboko w gwiazdach wystarczy zaledwie znikoma superadiabatyczność by konwekcja była bardzo efektywna.

Głęboko w gwiazdach gradient temperatury musi więc być bardzo blisko adiabatycznego gradientu temperatury.

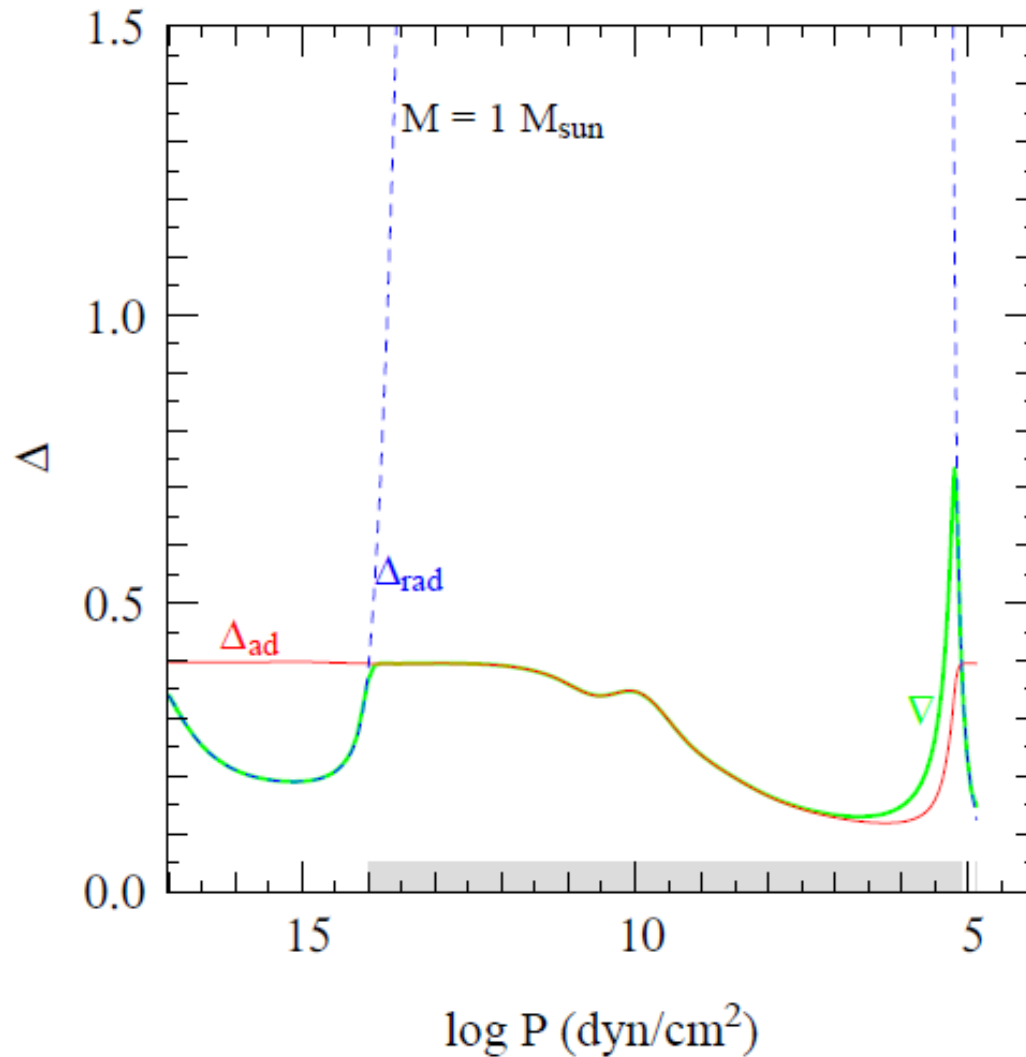
$$\frac{dT}{dm} = -\frac{G m}{4 \pi r^4} \frac{T}{P} \frac{d \log T}{d \log P} = -\frac{G m}{4 \pi r^4} \nabla_{ad}$$

Blżej powierzchni konwekcja wymaga większej superadiabatyczności, a przy samej powierzchni staje się mało efektywna (gdyż mamy małą gęstość i temperaturę materii → patrz wzór na strumień).

Modele numeryczne pokazują, że średnia droga swobodna bąbla gazu wynosi:

$$l_m \approx (1.5 \dots 2.0) \cdot H_P$$

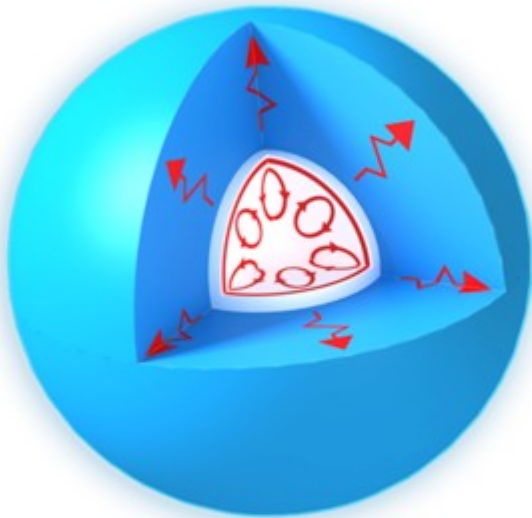
Rozkład gradientu temperatury



Model wnętrza gwiazdy o masie Słońca (warstwy zewnętrzne).
Linia czerwona – gradient adiabatyczny, niebieska – gradient promienisty,
zielona – gradient rzeczywisty, szary pasek – konwekcja.
Głęboko konwekcja jest efektywna (grad. rzeczywisty = adiabatyczny),
w warstwach płytszych coraz mniej (grad. rzeczywisty > adiabatycznego).
Widać też obszary częściowej jonizacji (spadek zielonej linii).

Heat Transfer of Stars

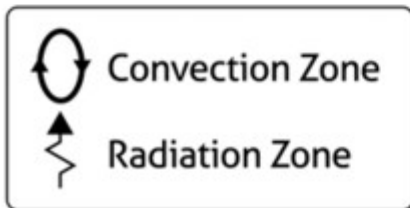
> 1.5 solar masses



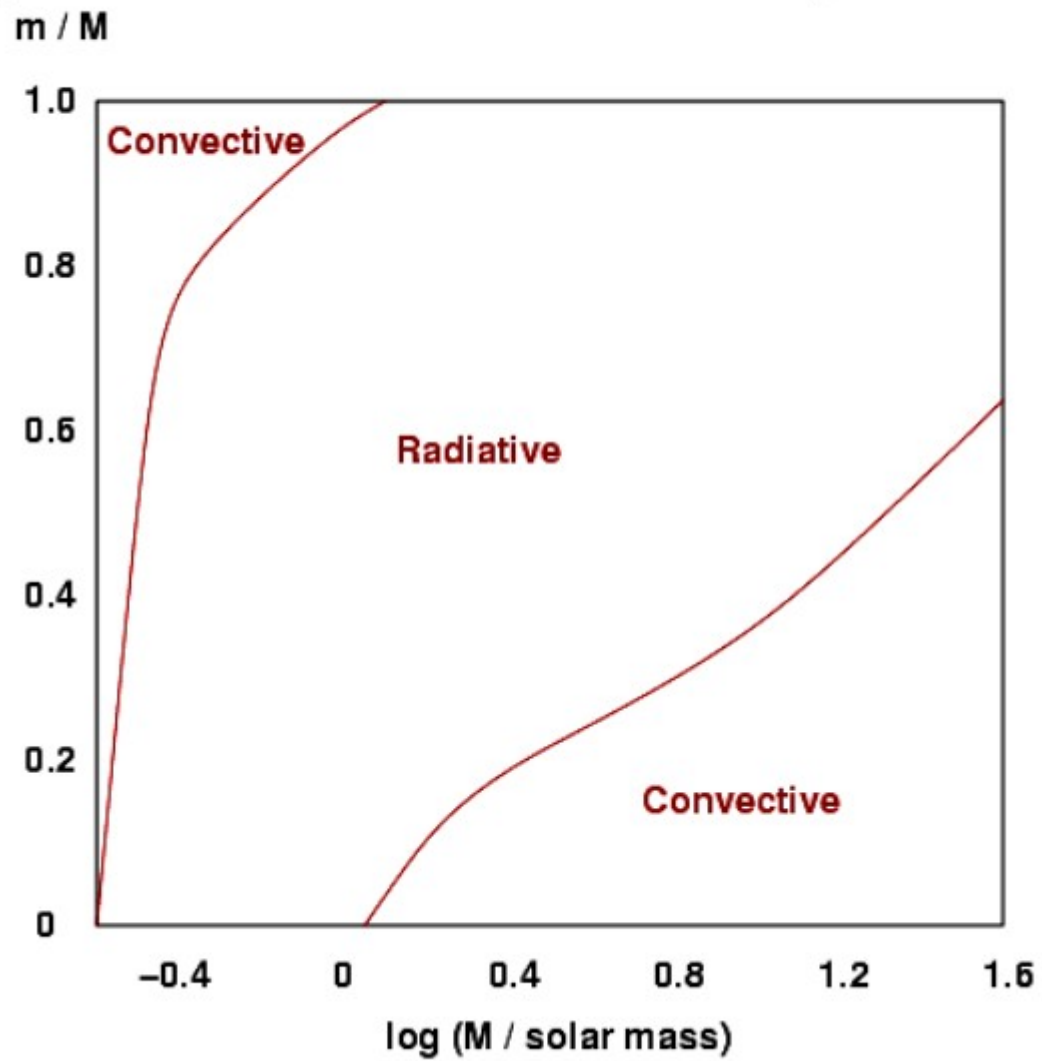
0.5 - 1.5 solar masses



< 0.5 solar masses



Regions of convection in main sequence stars



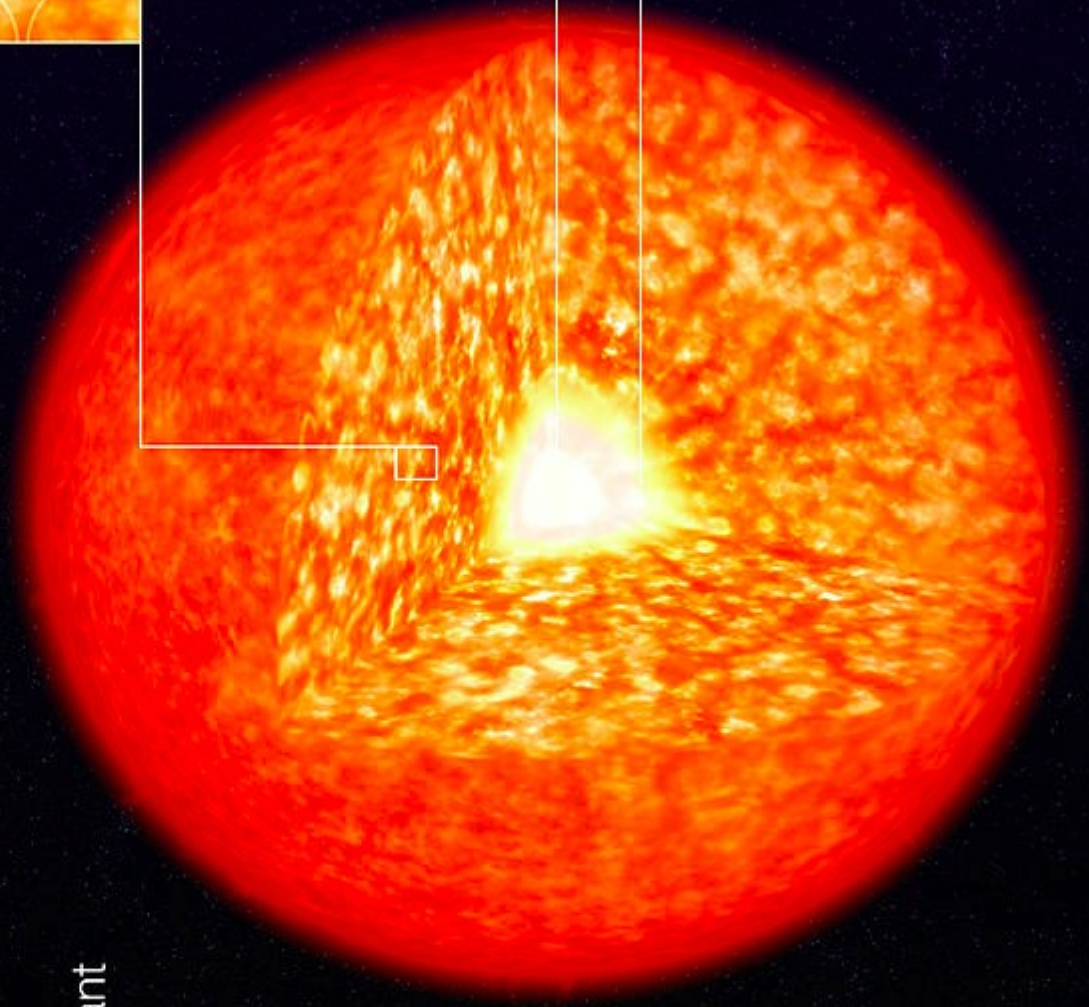
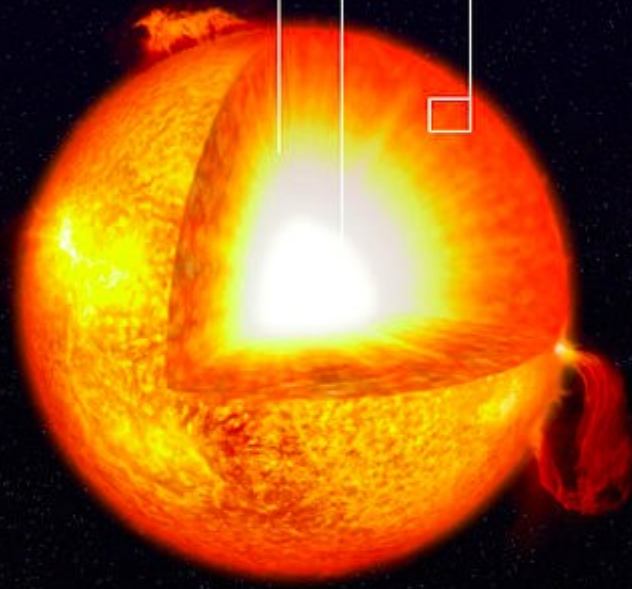
Radiative Zone

Core

Convective Zone

Core

Burning Shell



Solar Type

Red Giant



Scale \longleftrightarrow 200 Earth Radii

Skala czasu konwektywnego mieszania materii

$$\tau_{mix} \sim \frac{qR}{v_c} \sim qR \left(\frac{M}{LR} \right)^{1/3}$$

q – ułamek promienia na którym odbywa się konwekcja

$$v_c \approx 5 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$$

$$\tau_{mix} \sim q \cdot 10^7 \text{ sec}$$

$$\tau_{mix} \ll \tau_{KH} \ll \tau_{nuk}$$

Jądro konwektywne jest homogeniczne chemicznie.

Głęboka otoczka konwektywna może zmienić skład chemiczny atmosfery gwiazdy.

Przestrzelanie konwektywne

Klasyczną granicę obszaru konwektywnego stanowi warstwa w której przyspieszenie bąbla gazu = 0. Jego prędkość nie musi być jednak zerowa, co stanowi podstawę teorii przestrzelania konwektywnego (ang. overshooting).

local MLT – teoria drogi mieszania bez przestrzelania (granica jest $a=0$)

non-local MLT – teoria drogi mieszania z przestrzelaniem (granica jest np. $v=0$)

$$l_m \approx (1.5 \dots 2.0) \cdot H_P$$

$$l_m \approx \alpha \cdot H_P$$

Bardzo trudne do wyliczenia – duża niepewność wyników.

Może mieć istotny wpływ na ewolucję gwiazd.

Zwykle zostawia się jako wolny parametr, który jest dopasowywany do obserwacji.

Przestrzelenie konwektywne

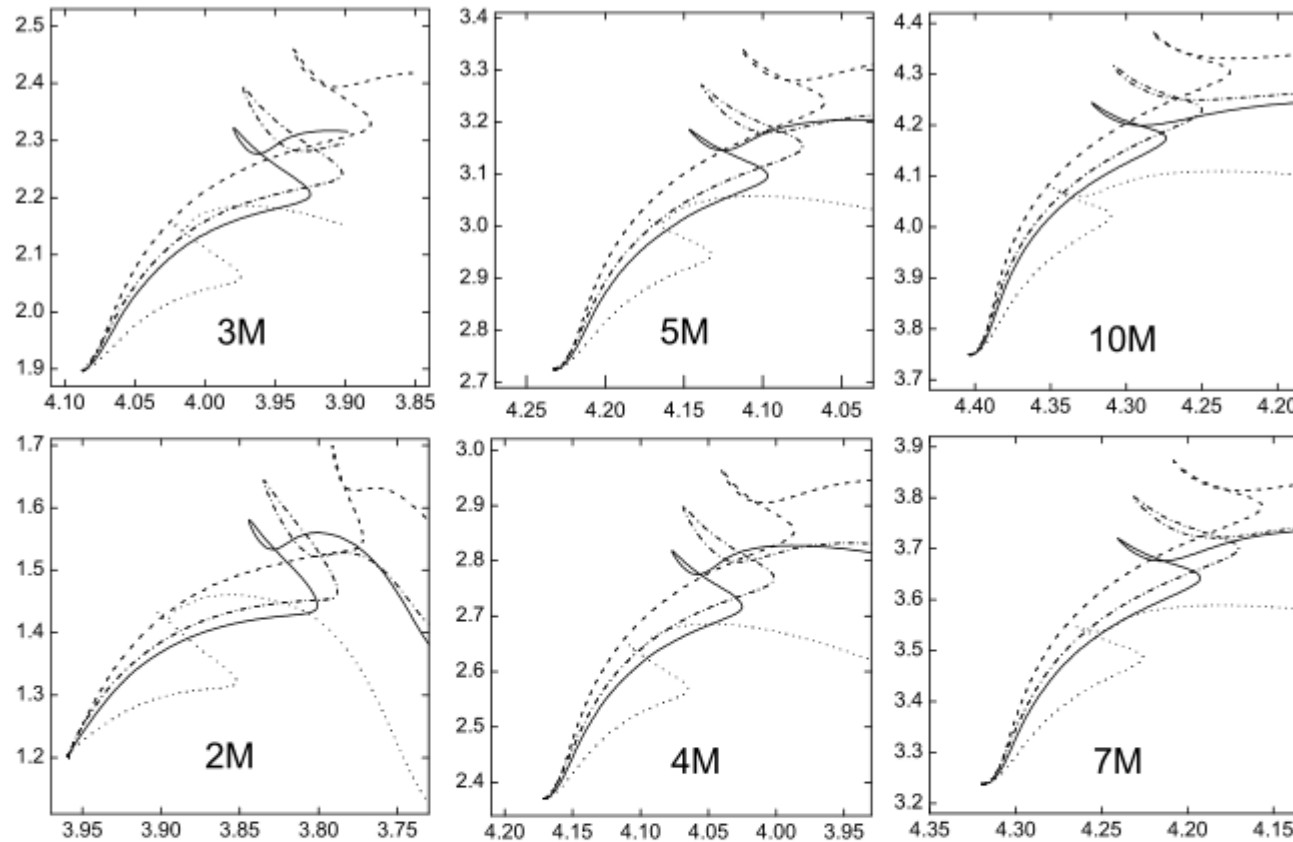


FIG. 2.— Stellar evolutionary tracks in the HR diagram of in the main sequence stage. The dotted lines correspond to the standard stellar models, in which the convection heat flux is calculated by using the MLT and the overshoot mixing is absent. The dot-dashed lines correspond to the classical overshoot stellar models, in which the convection heat flux is calculated by using the MLT and the overshoot leads to complete mixing in $0.4H_P$ outside the boundary of the convective core. The solid and dashed lines correspond to the stellar model with the TCM and diffusive overshoot mixing. The value of C_{X1} for solid and dashed lines is 10^{-3} and 10^{-2} , respectively.

Zależność masa-jasność

Równanie transportu promienistego:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3\kappa\rho}{16\pi ac T^3} \frac{l}{r^2}$$

Szacujemy:

$$r \rightarrow R \qquad l \rightarrow L \qquad \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta r} \sim \frac{T}{R} \qquad \rho \sim \frac{M}{R^3}$$

$$T^4 \frac{R^4}{M} = \frac{3\kappa}{16\pi ac} L$$

$$L \propto T^4 \frac{R^4}{M}$$

Zależność masa-jasność

Dla rozpraszania elektronowego nieprzezroczystość zależy tylko od X :

$$\kappa \rightarrow \kappa_{es} = 0.20 (1 + X) \sim \text{const}$$

$$L \propto T^4 \frac{R^4}{M}$$

Korzystając z twierdzenia o wiriale szacowaliśmy temperaturę wewnętrzną gwiazdy:

$$T = \frac{1}{3} \frac{\mu m_u}{k} \frac{G M}{R}$$

$$L \propto M^3$$

Zależność masa-jasność bis

Dla rozpraszania bound-free (jonizacyjnego) obowiązuje prawo Kramera:

$$\kappa \rightarrow \kappa_{bf} = 4.3 \cdot 10^{25} (1 + X) Z \rho T^{-7/2} \propto \rho T^{-7/2}$$

$$L \kappa \propto M^3$$

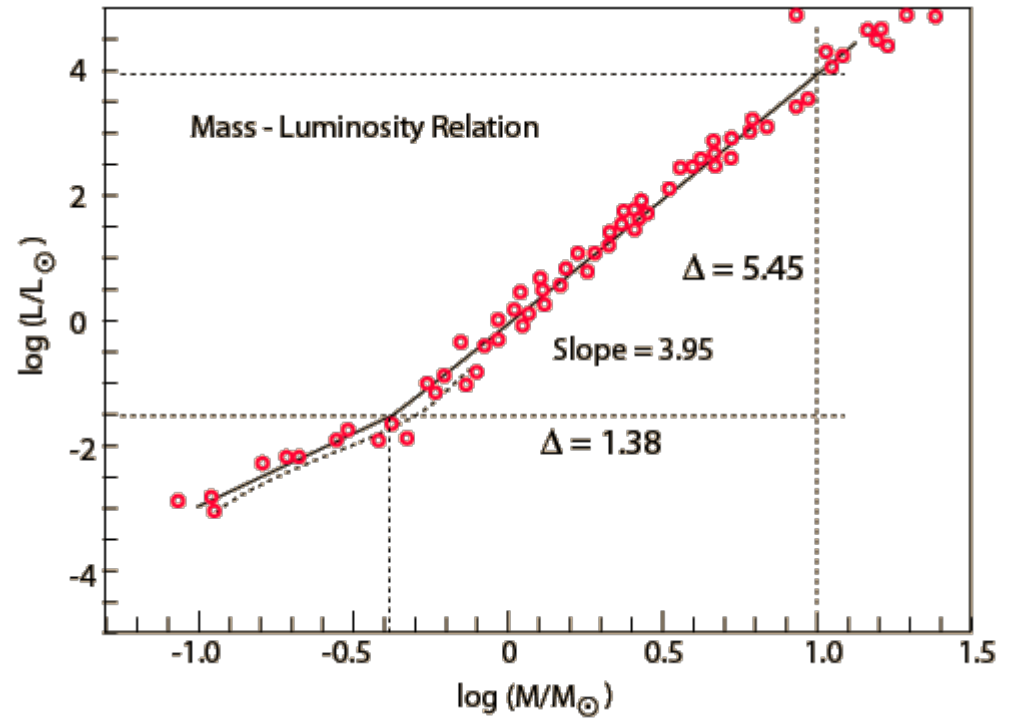
Korzystając z twierdzenia o wiriale szacowaliśmy temperaturę wewnętrzną gwiazdy:

$$T = \frac{1}{3} \frac{\mu m_u}{k} \frac{G M}{R}$$

$$L \propto M^{5.5} R^{-0.5}$$

Zależność masa-jasność obserwacje

$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx .23 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{2.3} \quad (M < .43M_{\odot})$$
$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^4 \quad (.43M_{\odot} < M < 2M_{\odot})$$
$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 1.5 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3.5} \quad (2M_{\odot} < M < 20M_{\odot})$$
$$\frac{L}{L_{\odot}} \approx 3200 \frac{M}{M_{\odot}} \quad (M > 20M_{\odot})$$



Zależność masa-jasność gwiazdy mało masywne

Zakładamy jądro w którym dominuje transport konwektywny:

$$F_{conv} = \frac{L}{4\pi R^2} = \frac{M}{R^3} \left(\frac{GM}{R} \right)^{3/2} (\nabla - \nabla_{ad})^{3/2}$$

$$L \propto \frac{M}{R} \left(\frac{M}{R} \right)^{3/2}$$

$$L \propto \left(\frac{M}{R} \right)^{5/2}$$

Zależność masa-jasność gwiazdy bardzo masywne

Ciśnienie promieniowania: $P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr}$$

R.t.p.:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3 \kappa \rho}{16 \pi a c T^3} \frac{l}{r^2}$$

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{4 \pi c} \frac{l}{r^2}$$

R.r.h.:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{G m \rho}{r^2}$$

$$G m \frac{\rho}{r^2} = -\frac{\kappa \rho}{4 \pi c} \frac{l}{r^2}$$

Upraszczając:

$$G m = -\frac{\kappa}{4 \pi c} l$$

$$M \propto L$$

Zależność masa-jasność

Z przedstawionych przykładów widać wyraźnie, że obserwowaną w przyrodzie wśród gwiazd ciągu głównego zależność masa-jasność można jakościowo wyprowadzić stosując następujące prawa (i związane z nimi założenia):

- równanie transportu promienistego (lub konwektywnego)

wiążącego:

gradient temperatury wewnątrz gwiazdy

z mocą wypromieniowywanej energii

- równanie równowagi hydrostatycznej (twierdzenia o wiriale)

wiążącego:

energię grawitacyjną (rozkład masy i rozmiar)

z wewnętrzną energią termiczną (gradientem ciśnienia,

który dla gazu doskonałego jest powiązany z gradientem temperatury)