

Astrofizyka IV

# **Wnętrza, ewolucja i pulsacje gwiazd.**

Krzysztof Kamiński

Temat wykładu

Proste modele gwiazd i ich stabilność

W poprzednim odcinku

Tempo zmiany składu chemicznego.  $\frac{dX_i}{dt}$

Tempo produkcji energii termojądrowej.  $r_{i,j,k} [1/cm^3]$   $\epsilon_{nuk} [erg/g]$

Wydajność energetyczna reakcji Q i deficyt masy.

Tunelowanie i funkcja Gamowa.

Cykl p-p, CNO,  $3\alpha$ .  $r_{i,j} \propto T^\nu$

Wychwył neutronów (procesy: s i r).

Emisja neutrin (procesy Urca i inne)

Deficyt neutrin słonecznych.

## Kilka pytań (z odpowiedziami)

**Dlaczego synteza H może się odbywać w niższej temperaturze niż synteza He?**

Ze względu na silniejsze oddziaływania elektrostatyczne 2 p niż 1 p.

**Czy możliwa jest synteza pierwiastków cięższych niż Fe przed wybuchem SN?**

Jest możliwa, nawet w niskich temperaturach, ze względu na wychwyty neutronów (połączony zawsze z rozpadem  $\beta^-$ ).

**Czy utrata energii ze względu na produkcję neutrin jest istotna w bilansie energii gw.?**

Zazwyczaj nie, ale staje się istotna np. podczas chłodzenia białych karłów lub w trakcie wybuchów supernowych.

**Który proces syntezy produkuje najwięcej energii na jednostkę masy danego pierwiastka?**

Synteza H. Ze względu na największą różnicę energii wiązania na nukleon pomiędzy H i He w porównaniu do innych sąsiednich pierwiastków.

## Pełny zestaw różniczkowych równań ewolucji gwiazd

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \leftarrow \text{Uwaga! To nie jest równanie równowagi hydrostatycznej, tylko jego ogólniejsza forma uwzględniająca zmienność w czasie.}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{nuk} - \epsilon_v - T \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla \quad \nabla = \begin{cases} \nabla_{rad} = \frac{3\kappa}{16\pi a c G} \frac{lP}{mT^4} & \text{gdy } \nabla_{rad} \leq \nabla_{ad} \\ \nabla_{ad} + \Delta \nabla & \text{gdy } \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \end{cases}$$

Uwaga! Tu już jest założona pełna równowaga hydrostatyczna.

we wnętrzu zwykle = 0

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{A_i m_u}{\rho} \left( -\sum_{j,k} r_{ij,k} + \sum_{k,l} r_{kl,i} \right) + [\text{mieszanie materii}] \quad i = 1 \dots N$$

## Różniczkowe równania ewolucji gwiazd

Ilość równań:  $4 + N$

Niewiadome:  $r, \rho, T, l, X_i$

Dzięki znajomości fizyki możemy określić te wielkości:  $P, s, \kappa, \nabla_{ad}, \Delta \nabla, \epsilon_{nuk}, \epsilon_v, r_{ij,k}$

jako funkcje postaci:  $f(\rho, T, X_i)$

Ilość niewiadomych:  $4 + N$

Niewiadome są funkcją zarówno  $m$  i  $t$ :  $0 < m < M \quad t > t_0$

Potrzebne jest określenie: warunków brzegowych dla  $m=0$  i  $m=M$

warunków początkowych np.  $X_i(m, t_0)$

## Trzy rodzaje pochodnych po czasie

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$$

Zmiany struktury hydrostatycznej w dynamicznej skali czasu.  
W równowadze hydrostatycznej = 0.

$$-T \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_{gr}$$

Zmiany struktury termicznej w term. skali czasu:

$\epsilon_{gr} > 0$  *kurczenie warstwy*

$\epsilon_{gr} < 0$  *pęcznienie warstwy*

Gdy gwiazda ewoluuje powoli:  $\epsilon_{gr} \approx 0$

$$\frac{\partial X_i}{\partial t}$$

Zmiany składu chemicznego zwykle w jądrowej skali czasu.  
W danym momencie można więc uznać, że = 0.

Można więc uznać, że 4 pierwsze równania opisują strukturę gwiazdy dla **stałego** składu chemicznego na danym etapie ewolucji.

## Warunki brzegowe

W przypadku modeli wewnątrz gwiazd nie wszystkie warunki brzegowe da się określić z tego samego brzegu ( $m=0$  lub  $m=M$ ).

Niektóre są określone w centrum gwiazdy, inne na powierzchni.

Uniemożliwia to bezpośrednie całkowanie równań.

$$r, P, T, l, X_i$$

W centrum:

$$r=0$$

$$m(r=0)=0 \quad l(r=0)=0$$

$$P(r=0)=? \quad T(r=0)=?$$

Na powierzchni:

$$r=R$$

$$m(r=R)=M$$

Najprościej – „przybliżenie zerowe”:

$$P \approx 0 \quad T \approx 0$$



## Warunki brzegowe

Na powierzchni:  $r = R$

$$m(r = R) = M$$

Lepiej – „przybliżenie fotosferyczne”:

Uznajemy za granicę gwiazdy fotosferę:  $\tau = 2/3$

$$\tau(R) = \int_R^{\infty} \kappa \rho dr \approx \langle \kappa_{ph} \rangle \int_R^{\infty} \rho dr = 2/3$$

Dalej mamy również:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{R^2} \rho \quad P(R) \approx \frac{GM}{R^2} \int_R^{\infty} \rho dr$$

Co pozwala oszacować np:

$$P(R) = \frac{2}{3} \frac{GM}{\kappa_{ph} R^2}$$

## Warunki brzegowe

Na powierzchni:  $r = R$

$$m(r = R) = M$$

Najlepiej – bez przybliżeń:

Użyć pełnego modelu atmosfery gwiazdowej.  
Jest to najbardziej skomplikowane i zwykle niekonieczne podejście.

# ZAMS

Ciąg główny wieku zerowego.

Dla gwiazd w równowadze hydrostatycznej i „termicznej” (tzw. pełna równowaga), równania struktury gwiazdy stają się niezależne od czasu.

W takim razie do ich rozwiązania potrzeba jedynie:

- składu chemicznego  $X_i(m, t_0)$ ;
- warunków brzegowych;

Budowę gwiazdy znajdującej się w pełnej równowadze na danym etapie ewolucji możemy więc określić **niezależnie** od ścieżki ewolucji, którą doszła ona do tego etapu.

Nie musimy więc wiedzieć jak gwiazdy się rodzą, by określić jak są zbudowane!  
Struktura gwiazd w ZAMS zależy więc jedynie od masy i składu chemicznego!

Gwiazdy na różnych etapach swojej ewolucji nie muszą być w pełnej równowadze.

Protogwiazdy znajdują się w równowadze hydrostatycznej, ale **nie** w termicznej.

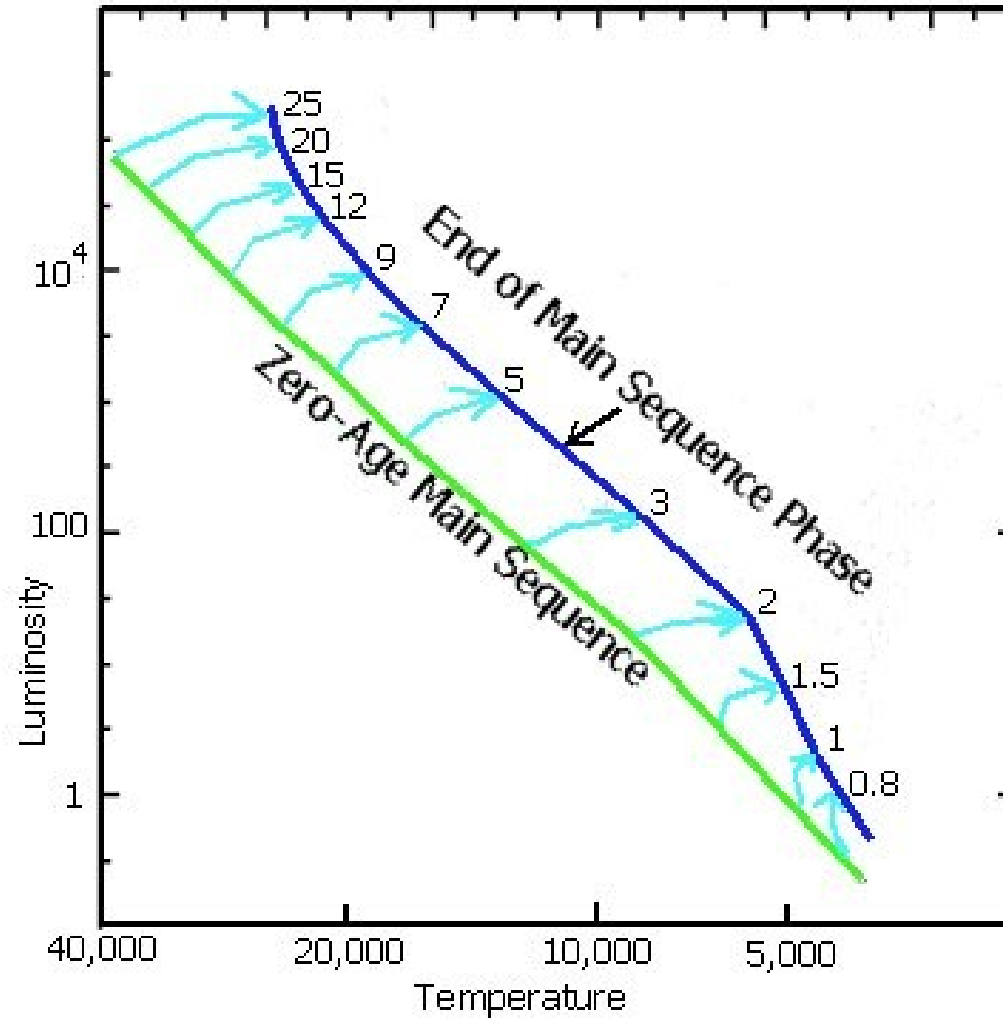
Do określenia ich struktury wymagana jest więc znajomość pochodnej entropii od czasu.

$$\epsilon_{gr} \neq 0$$

Na szczęście w przypadku protogwiazd, które są w pełni konwektywne, mamy adiabatyczny rozkład temperatury i ciśnienia co upraszcza modelowanie.

# ZAMS

Ciąg główny wieku zerowego.



**ZAMS i TAMS**

## Warunki brzegowe – wpływ na modele gwiazd

W otoczce (ang. envelope) we wnętrzu gwiazdy nie ma produkcji energii i zawarte jest relatywnie mało masy, więc:

$$l = L \quad m \approx M$$

dlatego możemy napisać równanie transportu promienistego jako:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{T}{P} \nabla_{rad} = \frac{3}{16 \pi a c G} \frac{\kappa l}{m T^3} \approx const \frac{L}{M} \frac{\kappa}{T^3}$$

gdzie używamy zmiennej  $P$  zamiast  $m$ , gdyż  $m$  zmienia się nieznacznie.

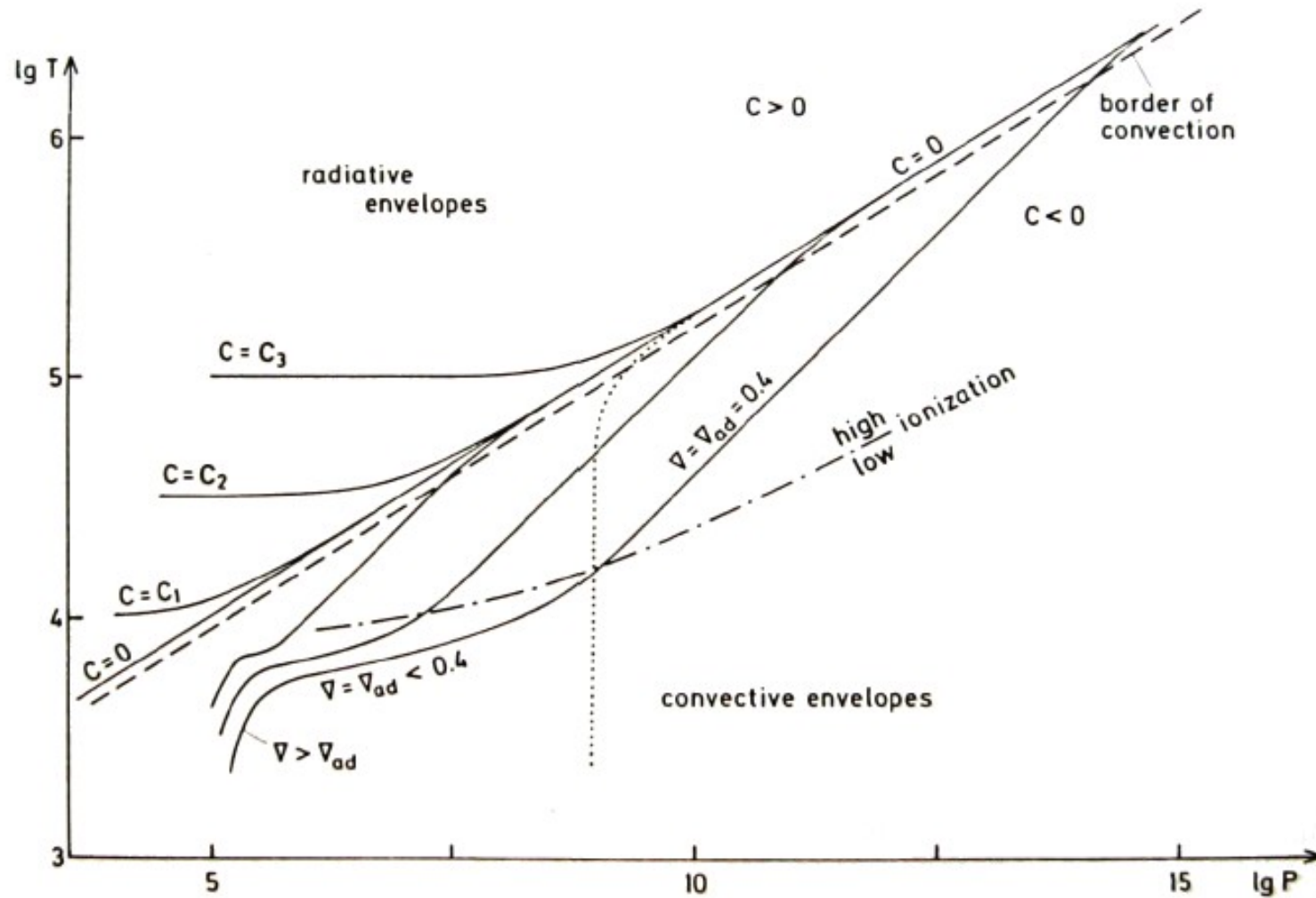
Przybliżając nieprzezroczystość  $\kappa$  jako stałą i całkując mamy:

$$T^4 \propto P + C$$

Dla dużych ciśnień  $P \gg C$  więc:

$$\nabla = d \log T / d \log P = 0.25 < \nabla_{ad} = 0.4$$

## Warunki brzegowe – wpływ na modele gwiazd

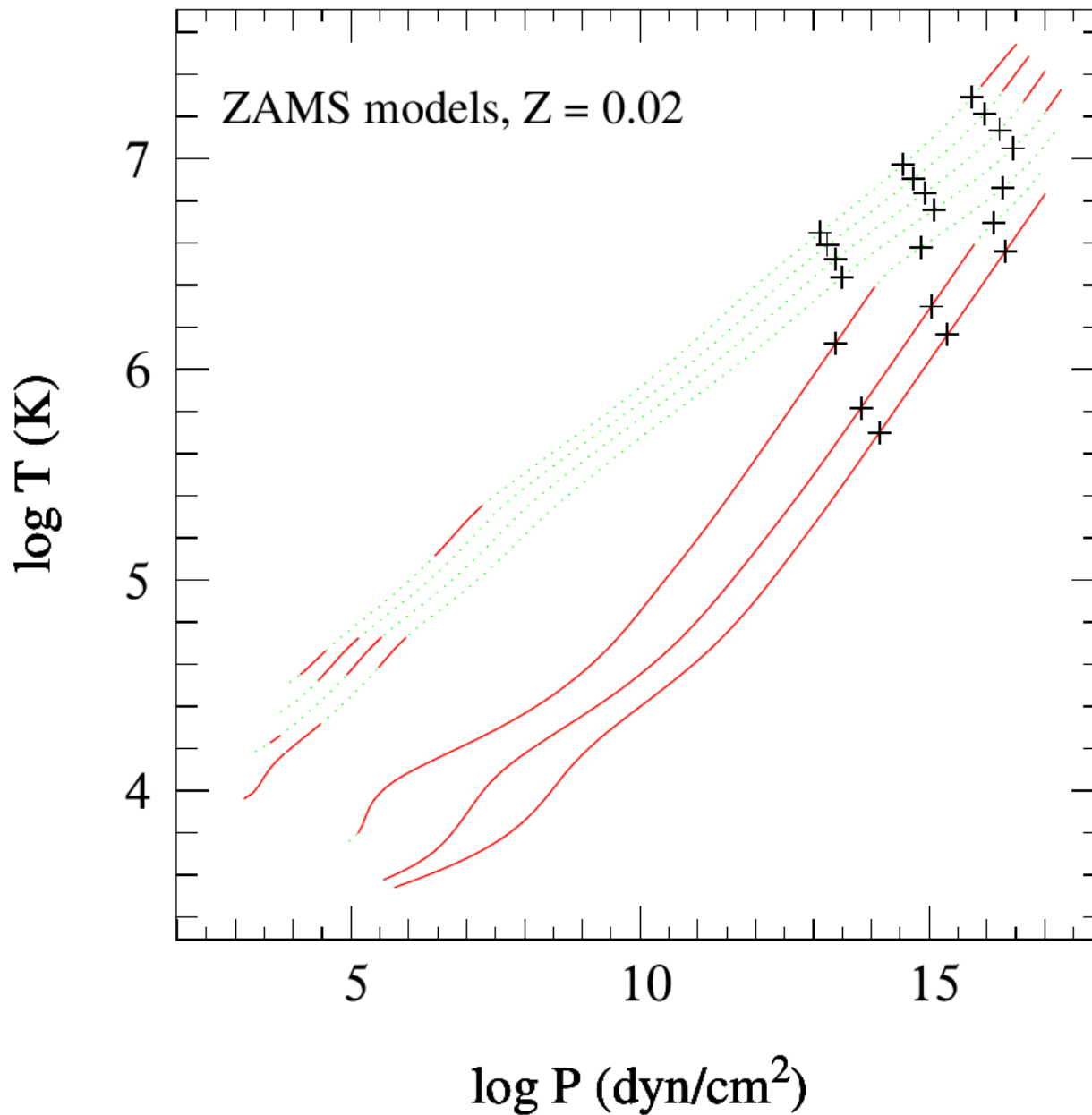


$C > 0$ : gradient temperatury jest mniejszy ( $\sim 0.25$ ), otoczka jest promienista, temperatura powierzchni gwiazdy jest wysoka ( $T_{\text{pow}} > 9000\text{K}$ ).

Struktura otoczki nie szczególnie jest wrażliwa na warunki brzegowe na powierzchni.

$C < 0$ : gradient temperatury jest większy ( $> 0.25$ ), otoczka jest konwektywna.

Przybliżenie promieniste nie jest dobre (kropki), modele szczegółowe pokazują linie ciągłe. Struktura otoczki zmienia się silnie przy niewielkiej zmianie warunków powierzchniowych.



Modele szczegółowe gwiazd, od góry: 16, 8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25 masy Słońca. Skala  $\log P$  uwidacznia zewnętrzne otoczki. Plusiki oznaczają 0.01M, 0.1M i 0.5M. Gwiazdy poniżej masy Słońca mają głębokie otoczki konwektywne (linie ciągłe), gwiazdy masywniejsze tylko niewielkie obszary związane z częściową jonizacją.

## Uprozczone, statyczne równania równowagowe

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

struktura mechaniczna gwiazdy

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_{nuk}$$

struktura termiczna gwiazdy

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \nabla$$

$$\nabla =$$

$$\nabla_{rad} = \frac{3\kappa}{16\pi a c G} \frac{lP}{mT^4}$$

$$gdy \quad \nabla_{rad} \leq \nabla_{ad}$$

$$\nabla_{ad}$$

$$gdy \quad \nabla_{rad} > \nabla_{ad}$$

Czy da się rozwiązać analitycznie?

Nie, choćby dlatego, że:  $\epsilon_{nuk} \propto \rho T^{\nu \gg 1}$        $\kappa = \text{skomplikowana funkcja}(\rho, T)$

równania są ze sobą powiązane i muszą być rozwiązywane razem



## Gwiazdy politropowe

Analityczne rozwiązanie równań budowy wnętrza gwiazd da się jednak znaleźć, przy upraszczającym założeniu tzw. politropowego równania stanu:

$$P = K \rho^\gamma$$

Wówczas rachunki się upraszczają (dwa pierwsze równania stają się niezależne od pozostałych) i się policzyć analitycznie, tzw. **modele politropowe**.

Rozwiązanie tego zagadnienia jest znane pod nazwą równania **Lane-Emdena**.

Które z dotychczasowo poznanych równań stanu jest politropowe?

Równanie stanu gazu zdegenerowanego!

## Gwiazdy politropowe

Politropowe równanie stanu ma postać:

$$P = K \rho^\gamma \quad \gamma = 1 + 1/n$$

Gdzie  $n$  jest indeksem politropy a  $K$  jest stałą ciśnieniową.  
Dla zdegenerowanego gazu elektronowego  $\gamma$  ma wartość  $5/3$   
w przypadku nierelatywistycznym ( $n=1.5$ ), a  $4/3$  ( $n=3$ ) w relatywistycznym.

Równanie Lane-Emdena (równanie równowagi hydrostatycznej dla politropy):

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0$$

gdzie  $\xi$  jest bezwymiarowym promieniem gwiazdy, a  $\theta$  zależy od gęstości:

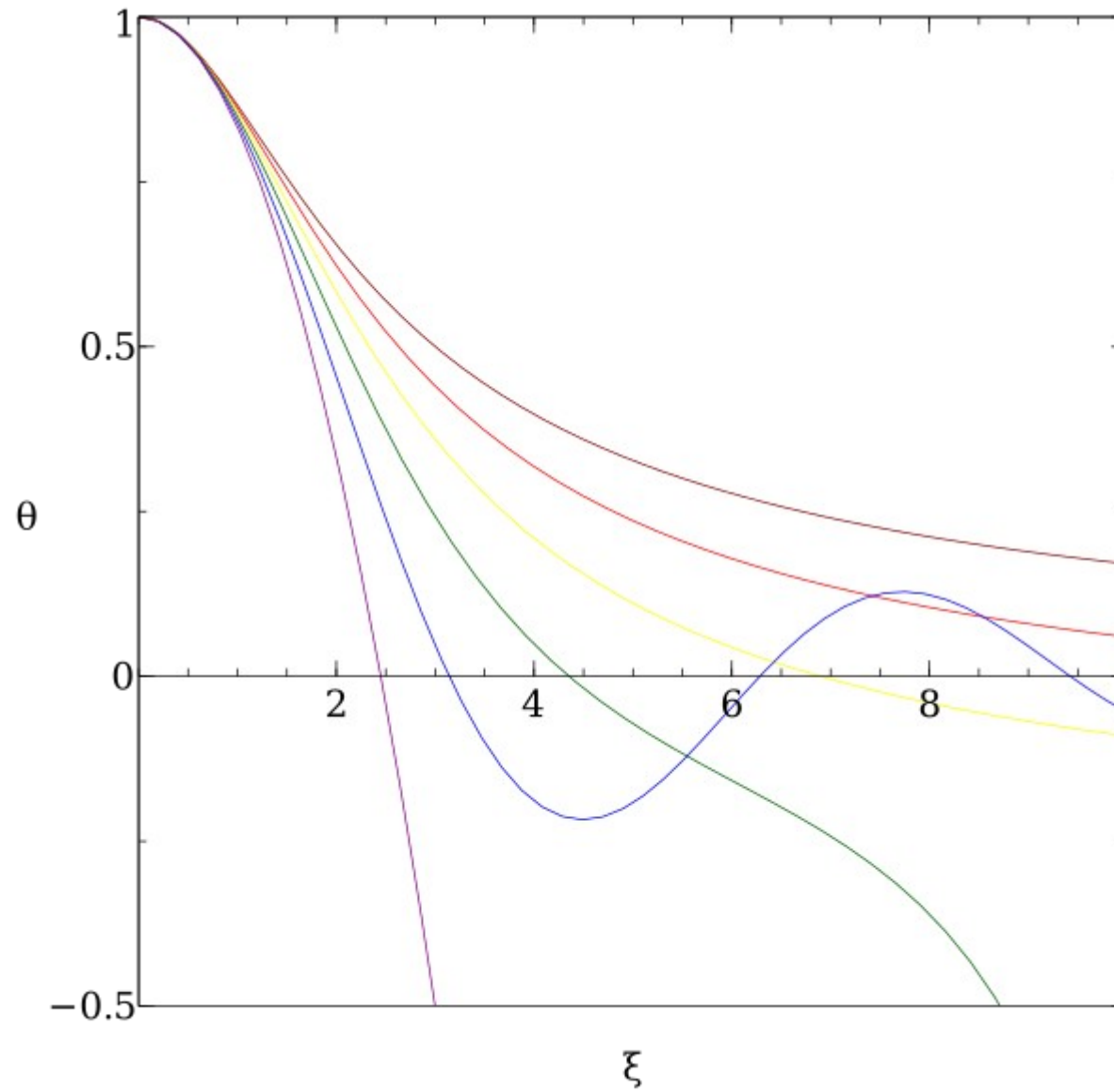
$$r = \alpha \xi \quad \alpha^2 = (n+1) K \rho_c^{1/n-1} / 4\pi G \quad \rho / \rho_c = \theta^n$$

Dla  $n = 0, 1, 5$  istnieją rozwiązania analityczne (dwie stałe)!

Dla pozostałych indeksów równanie L-E można rozwiązać numerycznie.

Białe karły są dość dobrze opisywane rozwiązaniem dla  $n=3$ .

# Gwiazdy politropowe



Rozwiązania dla  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

## Relacje homologiczne

Pomimo, że modele wewnątrz gwiazd wymagają skomplikowanych metod numerycznych, by je wyznaczyć, cechują się często dużym stopniem podobieństwa.

Relacje homologiczne to właśnie relacje skalujące pomiędzy modelami gwiazd o różnych  $R$  i  $M$ .

Zdefiniujmy homologiczną masę powłoki gwiazdowej  $x$ :

$$x = \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$$

Dwa modele gwiazd są homologiczne jeśli:

$$\frac{r_1(x)}{R_1} = \frac{r_2(x)}{R_2}$$

Gwiazdy homologiczne mają więc taki sam **względny rozkład masy**.

Relacje homologiczne są przydatne m.in. przy skalowaniu lub interpolacji pełnych, numerycznych modeli gwiazd, a czasem nawet do ich interpretacji.

## Relacje homologiczne

Równanie ciągłości:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

Dla gwiazdy nr 1 mamy:

$$\frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{M_1}{4\pi r_1^2 \rho_1}$$

Podstawiając:  $r_1 = r_2 (R_1 / R_2)$

$$1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{M_1}{M_2} \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^3$$

Powyższe równanie musi być spełnione dla każdej wartości  $x$ , co jest możliwe tylko gdy:

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} = \frac{M_2}{M_1} \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^3$$

A więc otrzymujemy:

$$\rho(x) \propto \rho_c \propto \frac{M}{R^3} \propto \bar{\rho}$$

## Relacje homologiczne

Równanie równ. hydrostat.:

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{G m}{4\pi r^4}$$

Dla gwiazdy nr 1 mamy:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{G M_1^2 x}{4\pi r_1^4}$$

Podstawiając:  $r_1 = r_2 (R_1/R_2)$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial P_2}{\partial x} \cdot \left[ \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right]$$

Z czego wynika, że:

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^4$$

A więc otrzymujemy:

$$P(x) \propto P_c \propto \frac{M^2}{R^4}$$

Co oznacza, że w równowadze hydrostatycznej ciśnienie w **każdej warstwie** skaluje się proporcjonalnie do  $M^2/R^4$ .

## Relacje homologiczne

### Dla gwiazd ciągu głównego

Dla gwiazd w równowadze termicznej przyjmujemy tempo produkcji energii:

$$\epsilon_{nuk} = \epsilon_0 \rho T^\nu$$

Można wyliczyć relacje homologiczne dla  $R$ ,  $\rho_c$  i  $T_c$ ,  
które silnie zależą od wykładnika  $\nu$ :

---

pp-chain	$\nu \approx 4$	$R \propto M^{0.43}$	$T_c \propto \mu M^{0.57}$	$\rho_c \propto M^{-0.3}$
CNO cycle	$\nu \approx 18$	$R \propto \mu^{2/3} M^{0.81}$	$T_c \propto \mu^{1/3} M^{0.21}$	$\rho_c \propto \mu^{-2} M^{-1.4}$

---

Widać, że od sposobu produkcji energii zależy wiele parametrów,  
ale nie zmienia się zależność  $M \sim L$ !

## Stabilność gwiazd

Gwiazdy są w równowadze hydrostatycznej i termicznej.

Czy jest to równowaga stabilna czy niestabilna?

Długowieczność gwiazd sugeruje stabilność, ale trzeba to sprawdzić.



# Stabilność gwiazd

Równowaga hydrostatyczna

Równowaga termiczna

Stabilność dynamiczna

Stabilność termiczna

Kompresja adiabatyczna:

$$\tau \ll \tau_{KH}$$

Kompresja homologiczna:

$R \rightarrow R'$  zmiana z  $R$  na  $R'$

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho \left( \frac{R'}{R} \right)^{-3}$$

Zgodnie z równaniem adiabaty:

$$\frac{P'}{P} = \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^{\gamma_{ad}} = \left( \frac{R'}{R} \right)^{-3\gamma_{ad}}$$

## Stabilność dynamiczna gwiazd

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\gamma_{ad}} = \left(\frac{R'}{R}\right)^{-3\gamma_{ad}}$$

W równowadze hydrostatycznej:

$$\left(\frac{P'}{P}\right)_{HE} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{4/3} = \left(\frac{R'}{R}\right)^{-4}$$

A więc w trakcie kompresji:

Gdy:  $\gamma_{ad} > \frac{4}{3}$        $P' > P'_{HE}$       Warstwa gazu „**wypłynie**”

Gdy:  $\gamma_{ad} < \frac{4}{3}$        $P' < P'_{HE}$       Warstwa gazu „**zatonie**”

Warunkiem stabilności dynamicznej jest więc:

$$\gamma_{ad} > \frac{4}{3}$$

## Stabilność dynamiczna gwiazd

Ważna uwaga!

Wcześniej rozważaliśmy już niestabilność ze względu na lokalne zaburzenia, która prowadziła do konwekcji.

Teraz rozważamy zmianę parametrów całej sferycznej warstwy gwiazdy, a nie tylko niewielkiego bąbla w tej warstwie.

## Stabilność dynamiczna gwiazd

Dla gazu doskonałego:  $\gamma_{ad} = \frac{5}{3}$

Dla nierelatywistycznego, zdegenerowanego gazu elektronowego:  $\gamma_{ad} = \frac{5}{3}$

Dla gazu relatywistycznego:

$$\gamma_{ad} = \frac{4}{3}$$

Dominacja ciśnienia prom.  
(T wysokie,  $\rho$  niskie)

Ekstremalnie zdeg. gaz  $e^-$   
( $\rho$  bardzo wysokie)

Kiedy jeszcze może pojawić się  $\gamma_{ad} \leq \frac{4}{3}$  ?

W obszarach częściowej jonizacji ( $H \leftrightarrow H^+ + e^-$ )  $\longrightarrow$  pulsacje

W jądrze pod wpływem kreacji par ( $\gamma + \gamma \leftrightarrow e^+ + e^-$ )

W jądrze pod wpływem fotodezintegracji Fe ( $\gamma + Fe \leftrightarrow \alpha$ )

} kolaps  
lub  
eksplozja

## Stabilność dynamiczna gwiazd

Zaburzenie równowagi hydrostatycznej prowadzi do niestabilności w danej warstwie. O tym czy cała gwiazda ulegnie destabilizacji decyduje całka:

$$\int \left( \gamma_{ad} - \frac{4}{3} \right) \frac{P}{\rho} dm$$

Jeśli jest ona  $< 0$  oznacza to niestabilność całej gwiazdy, jeśli jest  $> 0$  oznacza to stabilność gwiazdy i tylko lokalne zaburzenie.

Przebieg  $P/\rho$  we wnętrzu gwiazdy:  
w jądrze  $P/\rho$  jest większe niż przy powierzchni.

$$\frac{P}{\rho} = R_{spec} T$$

Zaburzenie stabilności  $\gamma_{ad} < 4/3$  w dostatecznie dużym obszarze w jądrze prowadzi więc do niestabilności całej gwiazdy.

Zaburzenie w warstwach zewnętrznych, dla których  $P/\rho$  jest niewielkie nie prowadzi do rozpadu gwiazdy.

## Stabilność termiczna gwiazd

Z twierdzenia o wiriale dla gazu doskonałego:

$$E_{całk} = -E_{wewn} = \frac{1}{2} E_{graw}$$

Przyjmijmy, że wystąpiła nadprodukcja w jądrze gwiazdy:

$$\dot{E}_{całk} = L_{nuk} - L_{surf} > 0$$

To prowadzi do ekspansji gwiazdy, gdyż:

$$\dot{E}_{graw} > 0$$

oraz do spadku średniej temperatury, gdyż:

$$\dot{E}_{wewn} < 0$$

Ponieważ tempo produkcji energii nuklearnej:

$$\epsilon_{nuk} \propto \rho T^{\nu}$$

Więc ostatecznie:

$$\dot{L}_{nuk} < 0$$

## Stabilność termiczna gwiazd

Uwaga! Ciśnienie promieniowania redukuje efektywną energię potencjalną gwiazdy.

$$E_{całk} = -E_{wewn} = \frac{1}{2} (E_{graw} + E_{rad})$$

$$E_{całk} = \frac{1}{2} \beta E_{graw}$$

Gdy dominuje ciśnienie promieniowania:

$$\beta \rightarrow 0$$

Gwiazda staje się jedynie marginalnie stabilna termicznie,  
a do tego jak pokazaliśmy jest jedynie marginalnie stabilna dynamicznie,  
aż się prosi o problemy...

## Stabilność termiczna gwiazd

Równanie kurczenia/pęcznienia homologicznego:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{\chi_T} \left( \frac{4}{3} - \chi_\rho \right) \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{1}{\chi_T} (3\chi_\rho - 4) \frac{\dot{R}}{R}$$

W przypadku materii zdegenerowanej  
(nierelatywistycznej – tylko tu tw. o wiriale jest zachowane):

$$\chi_\rho = \frac{5}{3} \quad 0 < \chi_T < 1$$

Nadprodukcja energii w jądrze prowadzi do:

- pęcznienia gwiazdy
- WZROSTU temperatury

W efekcie: każdy zapłon materii zdegenerowanej prowadzi do niekontrolowanej łańcuchowej reakcji termojądrowej: błysk helowy, gwiazdy nowe.

Nie zawsze musi się to skończyć rozpadem gwiazdy, gdyż w wyniku podgrzania i pęcznienia gaz może przestać być zdegenerowany.



## Stabilność termiczna gwiazd

Niestabilność termiczna może pojawić się jeszcze w jednej sytuacji:

Dostatecznie cienka powłoka w której zachodzą reakcje termojądrowe, w wyewoluowanych gwiazdach również może być niestabilna, nawet gdy można ją opisać jako gaz doskonały.

Wówczas ekspansja gazu nie obniża dostatecznie temperatury gdyż ekspanduje tylko zewnętrzna granica tej powłoki, a nie cała powłoka, co może prowadzić do reakcji lawinowej.

Sytuacja ta dotyczy głównie wyewoluowanych gwiazd AGB, dla których przewiduje się występowanie tzw. pulsów termicznych.